Решения задач муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников

2020–2021 учебный год

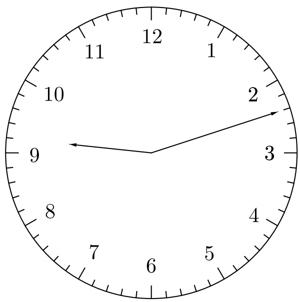
Ижевск, 2020

7 класс

1. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки в 9 часов 12 минут?

   Ответ: 156°.

   Решение. В 9:00 минутная стрелка направлена вверх, а часовая прошла от вертикального положения 45 минутных делений. Между часовой и минутной стрелкой в этот момент будет 90° (считаем меньший угол). Ещё за 12 минут минутная стрелка повернется на 12 делений (это пятая часть полного оборота), т. е. на 72°, а часовая — на одно минутное деление, т. е. на 6°. Значит, угол между часовой и минутной стрелкой составит $90° + 72° - 6° = 156°$.



Критерии оценки.

1) Приведён правильный ответ без решения — 1 балл.
2) Если верно найден больший угол между стрелками, баллы не снимаются.

2. Вася получил список книг на летние каникулы продолжительностью 12 недель. Он поставил себе цель их прочитать и решил, что каждую неделю он будет читать одно и то же количество книг. Но каждую неделю Вася читал на одну книгу меньше запланированного, поэтому выполнил свой план на 3 недели позже, чем хотел. На сколько недель раньше срока Вася прочитал бы все книги из списка, если бы каждую неделю читал на одну книгу больше, чем планировал?

Ответ: На две недели.

Решение. Первый способ («арифметический»). За 12 недель Вася не успел прочитать 12 книг. Их он прочитает за 3 недели, то есть Вася в реальности читал по 4 книги в неделю, а планировал читать по 5 книг. Следовательно, в списке 60 книг. Если бы он читал по 6 книг в неделю, то справился бы за 10 недель, то есть на две недели раньше срока.

Второй способ («алгебраический»). Пусть Вася хотел читать по x книг в неделю, тогда в его списке $12x$ книг. В реальности, он каждую неделю читал $x-1$ книгу и потратил на это 15 недель, то есть в списке $15(x-1)$ книг. Таким образом, $12x = 15(x-1)$, откуда $x = 5$. Значит, в списке 60 книг. Поэтому если читать по 6 книг в неделю, то хватит $60 : 6 = 10$ недель, то есть Вася прочитал бы весь список на $12 - 10 = 2$ недели раньше окончания каникул.

Критерии оценки.

Приведён верный ответ без решения — 0 баллов.

3. Прямоугольник разбили двумя прямыми, параллельными его сторонам, на четыре прямоугольника. Один из них оказался квадратом, а периметры прямоугольников, соседних с ним, равны 20 см и 16 см. Найдите площадь исходного прямоугольника.

Ответ: 80.

Решение. Пусть a и b — размеры исходного прямоугольника, а x — сторона квадрата, получившегося при разбиении. Тогда прямоугольники, смежные с этим квадратом, будут иметь размеры x на $a-x$ и x на $b-x$. По условию задачи $2(x+(a-x)) = 20$ и $2(x+(b-x)) = 16$. Отсюда находим $a=10$ и $b=8$. Тогда площадь прямоугольника равна $a \cdot b = 80$.

Критерии оценки.

Приведён ответ без решения — 0 баллов.

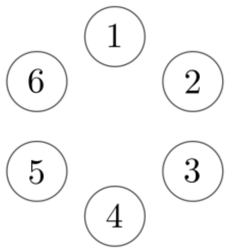
4. На острове живут два племени: рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда лгут. За обедом за круглым столом сидели 1 лжец и 5 рыцарей. За ужином они тем же составом сели за тот

же стол и каждый сказал: «Я сижу либо на своем месте, либо рядом с ним». Сколькими различными способами они могли сесть ужинать? Два способа считаются различными, если найдётся стул, на котором при каждом из способов сидят разные аборигены.

Ответ: 12.

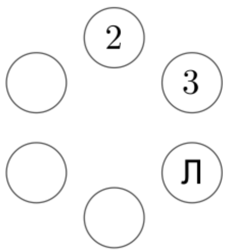
Решение. Пронумеруем стулья за столом так, что лжец за обедом сидел на первом месте:

За ужином лжец не мог сесть на стулья с номерами 1, 2, 6.

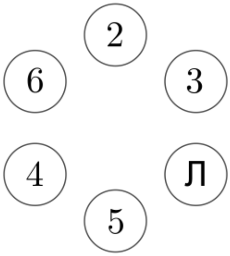


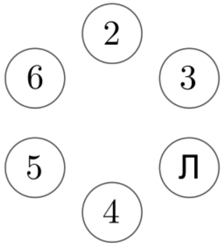
1. Пусть лжец за ужином сел на 3 стул. Далее будем ставить номера рыцарей, как они сидели за обедом, на те места, куда они сели за ужином. Рыцарь, сидевший на 3 месте, может сесть на 2 или 4 место.

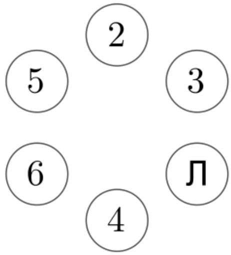
1а. Пусть рыцарь с места 3 за ужином сел на 2 место. Тогда рыцарь с 2 места мог сесть только на 1 место:



Рыцарь с 5 места мог сесть на любое из 4, 5, 6 мест. Его выбор однозначно определяет оставшуюся рассадку:

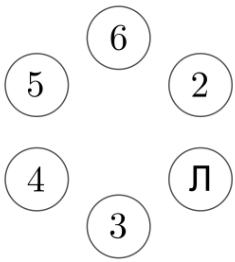






В этом случае получаем три варианта.

1б. Пусть рыцарь с места 3 за ужином сел на 4 место. Тогда рыцарь с 4 места мог сесть только на 5 место, рыцарь с 5 места мог сесть только на 6 место, рыцарь с 6 места мог сесть только на 1 место, рыцарь с 2 места мог сесть только на 2 место:

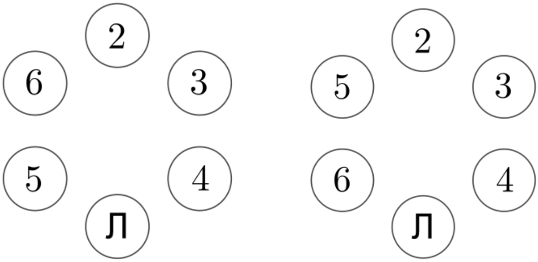


В этом случае получаем один вариант. Значит, если лжец сел на 3 место, то имеется 4 способа рассадки рыцарей.

2. Пусть лжец за ужином сел на 5 стул. Этот случай в силу симметрии аналогичен 1 случаю. Получаем ещё 4 варианта.

3. Пусть лжец за ужином сел на 4 стул. Тогда рыцарь с 4 места мог сесть на 3 или 5 место.

3а. Пусть рыцарь с 4 места сел на 3 место. Тогда рыцарь с 3 места сел на 2 место, а рыцарь с 2 места сел на 1 место. 5 и 6 рыцарь могли сесть двумя способами:



3б. Пусть рыцарь с 4 места сел на 5 место. В силу симметрии, рассматривается аналогично 3а. Получаем ещё 2 случая.

Следовательно, в 3 случае ещё 4 варианта рассадки. Всего получаем 12 способов.

Критерии оценки.

Верно рассмотрены 1 или 2 случая из трёх — 2 балла.

5. Существует ли такой набор гирь с целыми весами меньше 10 г, что при их помощи можно набрать веса 2021 г, 2022 г, 2023 г, 2024 г, но при этом нельзя набрать 2020 и 2025 г?

Ответ: Да, существует.

Решение. Пример (есть и другие!): 224 гири по 9 г, по одной гире в 1 г, 2 г и в 5 г. Проверим, что все нужные веса набираются: $2021=224\cdot9+5$, $2022 = 224\cdot9+5+1$, $2023 = 224\cdot9+5+2$, $2024 = 224\cdot9+5+1+2$.

Так как вес всех гирь $224\cdot9+1+2+5 = 2024 < 2025$, то 2025 набрать нельзя.

Так как $223\cdot9+1+2+5=2015<2020$, то необходимо использовать все 224 гири по 9 г. Чтобы набрать 2020, нам придется набрать 4 г гирями 1,2,5 г, но это невозможно. Получаем, что этим набором нельзя набрать 2020 г.

Критерии оценки.

1) Приведён подходящий пример без объяснений — 3 балла.

2) Любая попытка доказать отсутствие подходящего примера оценивается в 0 баллов.

8 класс

1. Когда канистра заполнена на 40%, в ней содержится на 40 литров бензина меньше, чем когда она пуста на 40%. Сколько литров бензина в полной канистре?

   Ответ: 200 литров.

   Решение. Первый способ. Если канистра пуста на 40%, значит, она заполнена на 60%, то есть 40 литров составляют 20% её объёма. Следовательно, 100% объёма канистры — это 200 л.

   Второй способ. Пусть объём канистры — x литров. По условию задачи: $0{,}6x - 0{,}4x = 40$. Тогда $0{,}2x = 40$, то есть $x = 200$.

   Критерии оценки.

   Ответ без обоснования — 1 балл.

2. В коробке лежат фрукты (не менее пяти). Если вынуть наугад три фрукта, то среди них обязательно найдётся яблоко. Если вынуть наугад четыре фрукта, то среди них обязательно найдётся груша. Какие фрукты могут быть вынуты из коробки и в каком количестве, если взять наугад пять фруктов?

   Ответ: Три яблока и две груши.

   Решение. Из условия задачи следует, что в коробке не яблоками являются не более двух фруктов (иначе можно вынуть 3 фрукта, среди которых не будет яблок). Аналогично, не грушами являются не более трёх фруктов (иначе можно вынуть 4 фрукта, среди которых не будет груш). Таким образом, в коробке лежит ровно 5 фруктов: три яблока и две груши. Они все и будут вынуты.

3. В треугольнике ABC угол $B = 50°$. На прямой AC за точку C отложили отрезок $CQ = AB$, а за точку A отрезок $AP = BC$. Точки M и N —

середины отрезков BQ и BP соответственно, K — середина отрезка AC. Найдите угол NKM.

Ответ: $\angle NKM = 115^\circ$.

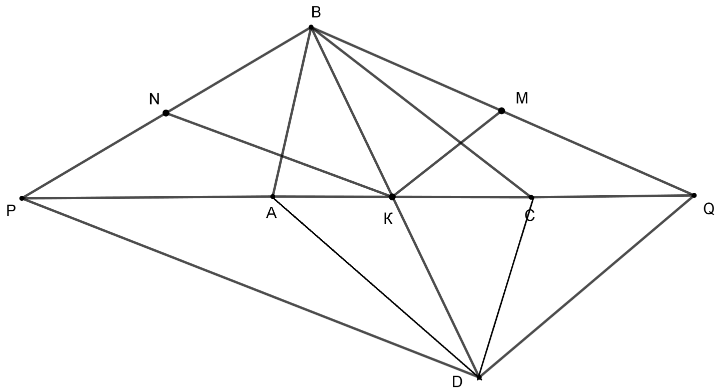


Рис. 1

Решение. См. рис. 1. Проведем через K отрезок $BD = 2BK$.

1) $KM \parallel DQ$ — средняя линия $\triangle BDQ$, K — середина BD по построению и M — середина BQ по условию.

$KN \parallel DP$ — средняя линия $\triangle BDP$, K — середина BD по построению и N — середина BP по условию.

Следовательно, $\angle NKM = \angle PDQ = \angle ADC + \angle ADP + \angle CDQ$.

2) $ABCD$ — параллелограмм, т. к. $BK = KD$ — по построению, $AK = KC$ — по условию. $\angle ADC = \angle ABC = 50^\circ$, противоположные углы в параллелограмме.

3) $AD = BC$ — противоположные стороны параллелограмма, $BC = AP$ — условие. $\triangle PAD$ — равнобедренный, $\angle APD = \angle ADP$.

$CD = AB$ — противоположные стороны параллелограмма, $AB = CQ$ — условие. $\triangle DCQ$ — равнобедренный, $\angle CQD = \angle CDQ$.

4) В $\triangle PDQ$ сумма углов

$180^\circ = \angle APD + \angle ADP + \angle ADC + \angle CDQ + \angle CQD$

$180^\circ = 2\angle ADP + 50^\circ + 2\angle CDQ$

$130^\circ = 2\angle ADP + 2\angle CDQ$

$65^\circ = \angle ADP + \angle CDQ \Rightarrow$

$\angle NKM = \angle PDQ = \angle ADC + \angle ADP + \angle CDQ = 50^\circ + 65^\circ = 115^\circ.$

Критерии оценки.

1) Верный ответ без обоснования (или с неверным обоснованием) — 0 баллов.

2) Все геометрические равенства должны быть обоснованы. При отсутствии обоснования логических переходов, за задачу ставится не более 3 баллов.

4. На n карточках написаны все натуральные числа от 1 до n. Два ученика взяли по 5 карточек. Оказалось, что произведение чисел на карточках первого ученика равно произведению чисел на карточках второго ученика. Определите при каком наименьшем n это возможно.

Ответ: $n = 14$.

Решение. Могло при 14. Пример: 3,4,5,6,7 и 1,2,9,10,14.

Меньше 10 карточек не могло быть. Ровно 10 быть не могло, так как число 7 может попасть только в один набор, и тогда только одно из двух произведений будет делиться на 7.

Если у нас 11 карточек, то среди выбранных точно будет 7 или 11. Но каждое из этих чисел может попасть только в один набор, и произведение чисел во втором наборе на него не будет делиться.

Если карточек 12, то из предыдущего, получаем, что среди выбранных нет 7 и 11. Рассмотрим множитель 3. Он входит в оставшиеся числа 5 раз: 3, 6, 9, 12, причём $9 = 3 \cdot 3$. Не получится их разделить на два набора так, чтобы степени троек были одинаковы.

Если карточек 13, что среди выбранных не может быть 7, 11, 13. Но оставшиеся нельзя разбить на две группы по 5, по доказанному выше. Получаем, что минимум 14 карточек.

Критерии оценки.

Верный ответ без обоснования — 1 балл.

5. У отличника Коли на полке стояло девятитомное собрание сочинений А. С. Пушкина. Хулиган Вася переставил все тома. Коля берёт какой-нибудь том и ставит в середину между оставшимися томами. Коля утверждает, что при помощи таких операций всегда сможет расставить книги по порядку. Прав ли он?

Ответ: Коля прав.

Решение. Опишем алгоритм. Он будет заключаться в выполнении одной и той же процедуры:

Шаг 1. Найдем место, на котором НЕ стоит нужный том, наиболее удалённое от середины. Например, для расстановки 256391487, это первое и девятое место. Их оказалось два. Выберем любое из них. Например, первое.

Шаг 2. Находим том с этим номером и ставим в середину. В примере том 1: $\underline{2}5639\mathbf{1}487 \to \underline{2}5639487 \to \underline{2}563\mathbf{1}9487$.

Шаг 3. Далее берем по очереди книги с выбранного места и ставим их в середину до тех пор, пока нужный том не окажется на выбранном месте.

$$\underline{2}563\mathbf{1}9487 \to \underline{5}63\mathbf{1}29487 \to \underline{6}3\mathbf{1}259487 \to \underline{3}\mathbf{1}2569487 \to$$
$$\to \underline{\mathbf{1}}25639487.$$

Заметим, что при этой процедуре не меняют положения книги, стоящие дальше от центра, чем выбранное место. Поэтому, выбирая каждый раз наиболее удалённое место, на котором не стоит нужная книга, мы, после выполнения процедуры, получаем, что раннее поставленные книги останутся на нужных местах, при этом появится ещё один том на своем месте. Не более чем за 8 процедур все книги окажутся на своих местах.

Критерии оценки.

Имеется верный (не обязательно такой же, как в приведённом решении) алгоритм, но нет обоснования, что он верный — 3 балла.

9 класс

1. На рынке Цветочного города 3 лимона и 2 банана стоят столько же, сколько стоят 15 апельсинов и 22 вишни, а 3 банана — как 2 лимона, 3 апельсина и 7 вишен. Что дороже: лимон или банан?

   Ответ: банан.

   Решение. В первом равенстве все умножим на 3:

   9 лимонов и 6 бананов = 45 апельсинов и 66 вишен.

   Заменим 6 бананов на 4 лимона, 6 апельсинов и 14 вишен:

   13 лимонов, 6 апельсинов и 14 вишен=45 апельсинов и 66 вишен.

   Отсюда получаем, что 13 лимонов=39 апельсинов и 52 вишни, откуда 1 лимон =3 апельсина и 4 вишни.

   Тогда 3 банана стоят, как 9 апельсинов и 15 вишен, 1 банан = 3 апельсина и 5 вишен.

   Получаем, что один банан дороже одного лимона.

   Критерии оценки.

   1) Правильный ответ без обоснования оценивается в 0 баллов.
   2) Допущена арифметическая ошибка (не более одной) и все остальное верно — 2 балла.

2. Можно ли число $\left(\dfrac{17^2+19^2}{2}\right)^2$ представить в виде суммы квадратов двух целых чисел?

Ответ: Можно.

Решение. Первый способ. Пусть $18 = a$. Тогда данное число можно записать и преобразовать так:

$$\left(\frac{17^2+19^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{(a-1)^2+(a+1)^2}{2}\right)^2 = (a^2+1)^2 = (a^2-1)^2+(2a)^2.$$

Следовательно $\left(\frac{17^2+19^2}{2}\right)^2 = (18^2-1)^2+36^2 = 323^2+36^2$.

Второй способ.

$$\left(\frac{17^2+19^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{289+361}{2}\right)^2 = 325^2 = (13\cdot 25)^2 = 13^2\cdot 25^2 =$$
$$= 169\cdot 25^2 = (144+25)\cdot 25^2 = (12^2+5^2)\cdot 25^2 =$$
$$= 12^2\cdot 25^2 + 5^2\cdot 25^2 = 300^2+125^2.$$

Получив, что данное число равно $13^2\cdot 25^2$, можно продолжить иначе:

$$\left(\frac{17^2+19^2}{2}\right)^2 = 13^2\cdot 25^2 = 13^2(20^2+15^2) = 13^2\cdot 20^2+13^2\cdot 15^2 = 260^2+195^2.$$

Третий способ. Так как 17^2 оканчивается цифрой 9, а 19^2 оканчивается цифрой 1, то число в скобках оканчивается цифрой 5. Значит, данное выражение имеет вид $(5k)^2$, где k — некоторое натуральное число. Тогда положительный ответ на вопрос задачи следует из равенства: $(5k)^2 = (4k)^2 + (3k)^2$.

Критерии оценки.

Приведён верный ответ без обоснования — 1 балл.

3. В треугольнике ABC точка M делит AC в отношении $m : n$ считая от A, точка P лежит на стороне BC. Отрезок AP пересекает BM в точке O. Оказалось, что $BO = BP$. Найдите отношение $OM : PC$.

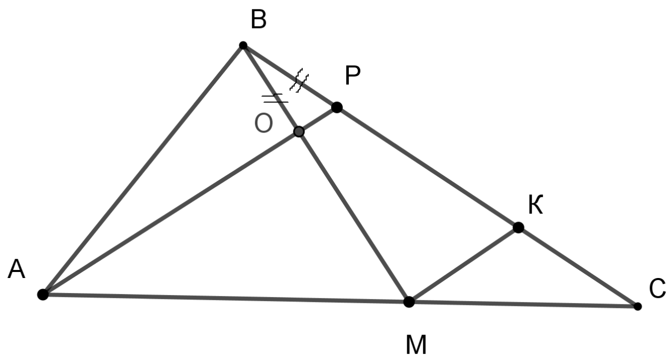


Рис. 2

Ответ: $\dfrac{OM}{PC} = \dfrac{m}{m+n}$.

Решение. См. рис. 2. Проведем $MK \parallel AP$.

1) В $\triangle MBK$: $\dfrac{BO}{OM} = \dfrac{BP}{PK}$, $BO = BP$. Следовательно, по теореме о пропорциональных отрезках $OM = PK$.

2) В $\triangle APC$ по теореме о пропорциональных отрезках (по теореме Фалеса) $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{PK}{KC} = \dfrac{m}{n}$.

3) $\dfrac{OM}{PC} = \dfrac{PK}{PC} = \dfrac{PK}{PK+KC} = \dfrac{m}{m+n}$.

Критерии оценки.

1) Верный ответ без обоснования (или с неверным обоснованием) — 0 баллов.

2) Все геометрические равенства должны быть обоснованы. При отсутствии обоснования логических переходов, за задачу ставится не более 3 баллов.

4. На Поле Чудес растёт два дерева. Если закопать монеты под одним из них, то наутро количество монет утроится, а если под другим — то закопанные монеты исчезнут. Буратино пришёл на Поле Чудес с 33 мо-

нетами. Какое наибольшее количество монет он может себе обеспечить поутру? Он не знает, под каким деревом что происходит.

Ответ: 49.

Решение. Способ закопать монеты — это разбить 33 монеты на три кучки: x — под первое дерево, y — под второе, $33 - x - y$ не закапывать вообще. Так как способов закопать монеты конечное число, то максимум, который может себе обеспечить Буратино, существует.

Заметим, что если Буратино закопал под деревья x и y монет, то он обеспечивает себе $33-x-y+3\cdot\min\{x, y\}$ монет наутро. Например, если он закопал под деревьями 10 и 13 монет, то с утра он гарантированно получит $10 + 3 \cdot 10 = 40$ монет.

Если Буратино закопал под деревьями разное число монет, и разница больше 1, то он может переложить из большей кучки монет в меньшую одну монету, и минимум монет в кучках увеличится. Действительно, если $x > y+1$, то $x-1 \geqslant y+1 > y$, так как в этом случае $y=\min\{x, y\} < < y + 1 = \min\{x - 1, y + 1\}$. Поэтому, в кучках монет, закопанных под деревьями, количество монет отличается не более, чем на 1.

Если в кучках монет, закопанных под деревьями, количества монет отличаются на 1, то можно монету из большей кучки не закапывать и Буратино обеспечит большее количество монет наутро. Действительно, $\min\{x + 1, x\} = \min\{x, x\}$, $(33 - x - x) + 3 \cdot \min\{x, x\} > (32 - x - x) + + 3 \cdot \min\{x, x\} = (33 - x - (x + 1)) + 3 \cdot \min\{x, x + 1\}$. Получаем, что в закопанных кучках должно быть равное количество монет.

Если в каждой из закопанных кучек меньше 16 монет, то незакопанных монет нечётное число, не меньшее 3. Тогда можно доложить в каждую кучку по одной монете и Буратино обеспечит себе большее число монет наутро, так как общее количество полученных монет увеличится на $-2 + 3 = 1$. Действительно, пусть $x < 16$, тогда

$$\begin{aligned}33 - 2x + 3 \cdot \min\{x, x\} = 33 + x < 33 - 2(x + 1) + 3(x + 1) =\\ = 33 - 2(x + 1) + 3 \cdot \min\{x + 1, x + 1\}.\end{aligned}$$

Итак, Буратино должен оставить одну монету и закопать по 16.

Критерии оценки.

1) Если предполагается, что каждую монету нужно закопать, хотя бы под одним деревом — 0 баллов.
2) Верный ответ, без обоснования — 1 балл.

5. Имеются два автомата для разлива кофе. Первый может налить любое заданное целое количество миллилитров кофе от 180 до 200. Второй — от 250 до 270. Найти объём, начиная с которого можно налить любое целое количество миллилитров кофе, используя только эти два автомата. Каждый автомат можно использовать любое число раз.

Ответ: 680.

Решение. Дальше мы говорим только про целые объёмы, не уточняя этого каждый раз. Заметим, что если мы научимся отмерять любой объём из промежутка длиной 180 мл, то все бóльшие объёмы мы сможем отмерить, прибавляя к каждому объёму из этого промежутка по 180 мл. Действительно, пусть у нас имеется алгоритм, позволяющий отмерить любое число мл от N до $N+179$. Тогда, долив в каждый из объёмов по 180 мл из первого автомата, мы получим объёмы из следующего промежутка длиной 180: от $N+180$ до $N+359$. Мы можем повторять это любое число раз.

Заметим также, что если мы используем первый аппарат n раз, а второй — m раз, мы можем отмерить любой объём от $180n + 250m$ до $200n + 270m$ мл.

Докажем, что 679 мл отмерить не удастся. Так как $2 \cdot 270 < 679$, а $4 \cdot 180 > 679$, то для того, чтобы отмерить этот объём нам понадобится использовать автоматы ровно 3 раза. Далее переберем, какие объёмы мы можем отмерить, используя автоматы ровно три раза:

$n = 3,\quad m = 0$: объём 540–600
$n = 2,\quad m = 1$: объём 610–670
$n = 1,\quad m = 2$: объём 680–740
$n = 3,\quad m = 0$: объём 750–810.

Мы видим, что 679 мл отмерить не удастся.

Теперь покажем, как отмерить любой объём от 680 до 860. Используя первый автомат один раз, а второй — два раза, мы можем налить любой объём от 680 до 740 мл. Используя первый автомат четыре раза, мы можем налить любой объём от 720 до 800 мл. Используя первый автомат три раза, а второй — один раз, мы можем налить любой объём от 790 до 870 мл.

Критерии оценки.

Верный ответ без обоснования — 1 балл.

10 класс

1. Может ли уравнение $x^2 - 2021x + 10a + 1 = 0$ иметь целые корни при каких-либо целых a?

   Ответ: Не может.

   Решение. При наличии корней квадратного уравнения, по теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2021 \\ x_1 \cdot x_2 = 10a + 1 \end{cases}$$

   При целых значениях a произведение корней $10a + 1$ — нечётное число, значит оба множителя — нечётные числа. Сумма двух нечётных чисел — чётное число, 2021 — нечётное число. Противоречие.

   Критерии оценки.

   Верный ответ без обоснования (или с неверным обоснованием) — 0 баллов.

2. В коробке лежат 30 цветных карандашей: красные, жёлтые и зелёные. Красных карандашей в 7 раз меньше, чем зелёных, и жёлтых карандашей меньше, чем зелёных. Какое наименьшее количество карандашей нужно вынуть из коробки не глядя, чтобы среди них обязательно нашлись карандаши всех цветов?

Ответ: 28.

Решение. Так как зелёных карандашей больше других, то их не менее 11 (иначе всего карандашей не более $10 + 9 + 9 < 30$). Если количество красных карандашей — x, то зелёных $7x$. Значит, $x + 7x \leqslant 30$, откуда получаем, что $x \leqslant 3$ и зелёных карандашей не более 21.

Из условия следует, что количество зелёных карандашей кратно 7. Получаем, что зелёных карандашей 14 или 21.

Если зелёных карандашей 14, то тогда красных — 14/7 = 2, жёлтых – $30-14-2=14$. Не выполнено условие, что жёлтых карандашей меньше, чем зелёных.

Получаем, что в коробке 21 зелёный, 6 жёлтых и 3 красных карандаша.

Если мы вытащим 27 карандашей, то они все могут оказаться не красными. Значит, нужно вынуть больше 27 карандашей, чтобы среди них оказались карандаши всех цветов.

Если мы вытащим 28 карандашей, то среди них обязательно окажется красный, иначе они все зелёные или жёлтые, но $28>21+6$. Аналогично, среди любых 28 карандашей окажется жёлтый, иначе они все зелёные и красные, но их $21 + 3 < 28$. И среди любых 28 карандашей окажется зелёный, иначе они все жёлтые и красные, но их $6 + 3 < 28$. Получаем, что среди 28 карандашей всегда найдутся красный, жёлтый и зелёный.

Критерии оценки.

1) Правильный ответ без обоснования оценивается в 1 балл.
2) Верно найдено, сколько каких карандашей, но неверно сделан вывод, сколько карандашей надо взять — 3 балла.
3) Неверно найдено количество карандашей каждого цвета, но далее верно проведены рассуждения, сколько карандашей надо взять — 2 балла.

3. Биссектрисы равнобедренного треугольника ABC с основанием AC и углом $B = 100°$ пересекаются в точке O. Точка E — середина дуги BC не содержащей точку A окружности, описанной около треугольника

ABC. На плоскости отметили точку K так, что $ABKO$ — параллелограмм. Найдите угол BEK.

Ответ: $\angle BEK = 100^\circ$.

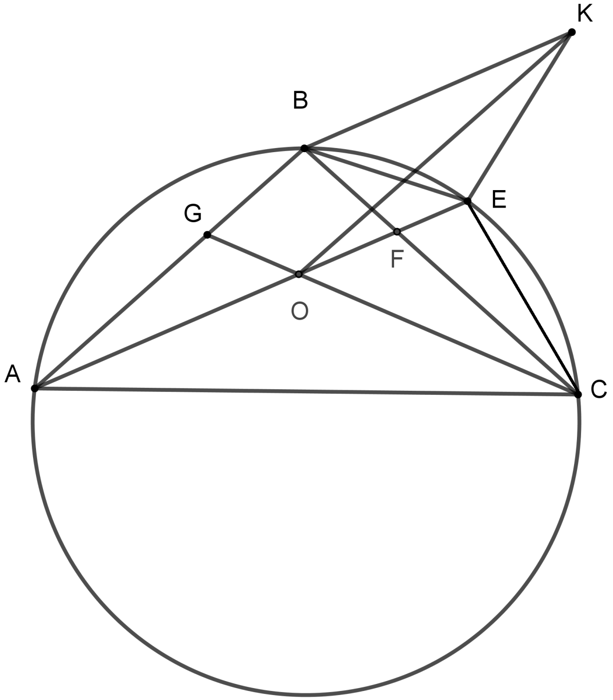


Рис. 3

Решение. См. рис. 3.

1) Биссектрисы AF и CG углов при основании в равнобедренном треугольнике. $\angle BAO = \angle OAC = \angle ACO = \angle OCB = \beta$.

2) AF — биссектриса, значит пересекает дугу BC в её середине (точка E). $\angle BCE = \angle BAE = \angle BAO = \beta$.

3) $\angle OEC = \angle AEC = \angle ABC = 100^\circ$ — вписанные, опирающиеся на одну дугу.

4) $\angle KBE = \angle BEA$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых BK и AE и секущей BE, $\angle BCA = \angle BEA = 2\beta$ — вписанные, опираются на одну дугу в окружности. Следовательно, $\angle OCB + + \angle BCE = 2\beta = \angle OCE = \angle KBE$.

5) $AO = OC$ — равные части равных биссектрис в равнобедренном треугольнике, $AO = BK$ — противоположные стороны параллелограмма. Следовательно, $OC = BK$.

6) $BE = EC$ в окружности равные дуги стягиваются равными хордами.

7) $\triangle OEC = \triangle BEK$ по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle BEK = \angle OEC = 100^\circ$.

Критерии оценки.

1) Верный ответ без обоснования (или с неверным обоснованием) — 0 баллов.
2) Все геометрические равенства должны быть обоснованы. При отсутствии обоснования логических переходов, за задачу ставится не более 3 баллов.

4. В турнире участвовало 14 команд. Каждая команда встречалась с каждой 10 раз. По окончании турнира была составлена итоговая таблица по убыванию количества побед каждой команды. Оказалось, что количество побед каждой команды (кроме команды, занявшей последнее место) на одну и ту же величину превышает количество побед, одержанных командой, находящейся в итоговой таблице сразу после неё. Определите наибольшее возможное количество побед, одержанных командой, занявшей последнее место. (Ничья в турнире не допускается.)

Ответ: 52.

Решение. Пусть команда, занявшая последнее место, одержала n побед, а разность между количеством побед, которые одержали соседние по турнирной таблице команды, равна d.

Общее количество побед совпадает с количеством всех встреч и равно $10 \cdot 14 \cdot 13/2 = 910$. Тогда имеет место равенство: $n + (n + d) + (n + 2d) + \dots + (n + 13d) = 910$. Сложив подобные члены в левой части равенства, получим: $14n + 91d = 910$ и $n = 13(10 - d)/2$.

Число n будет максимальным, если d минимально. Так как n и d натуральные числа, то число $(10 - d)$ чётное. Следовательно, n — максимально при $d = 2$ и равно 52.

Критерии оценки.

1) В решении должно быть обоснование, что величины n и d — натуральные числа. Если этого нет, снимается 1 балл.
2) Решение с арифметической ошибкой оценивается не более, чем в 4 балла.
3) При неправильно составленной последовательности количества побед решение оценивается не более, чем в 3 балла.

5. В некотором кружке есть трое нелюдимых участников, которые дружат только с тремя другими участниками кружка. Все остальные — общительные. Они дружат с одним и тем же числом участников кружка, большим трёх. Сколько общительных участников может быть в кружке, если число друзей каждого общительного участника равно количеству общительных участников кружка?

Ответ: 5,7,9.

Решение. Представим условие на языке графа. Вершины — участники кружка, рёбра соединят вершины, если соответствующие им члены кружка дружат. Сколько вершин может быть в графе, в котором имеется три вершины степени 3, а все остальные имеют одинаковые степени, большие 3, и эта степень равна количеству таких вершин. Пусть вершин, соответствующих общительным ученикам — N.

Так как в графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу рёбер, то количество вершин нечётной степени должно быть чётным. В нашем графе сумма степеней всех вершин $3 \cdot 3 + N \cdot N$. Значит, вершин, соответствующих общительным ученикам — нечётное число, большее трёх.

Так как каждая из этих N вершин соединена ровно с N другими, то она обязательно соединена ребром с одной из трёх вершин, соответствующих нелюдимам (так как она может быть соединена максимум с $N - 1$ вершиной, соответствующей общительным участникам). Всего из вершин, соответствующих нелюдимам выходит 9 рёбер. Значит $N \leqslant 9$.

Примеры для N=5,7,9 см. на рис. 4.

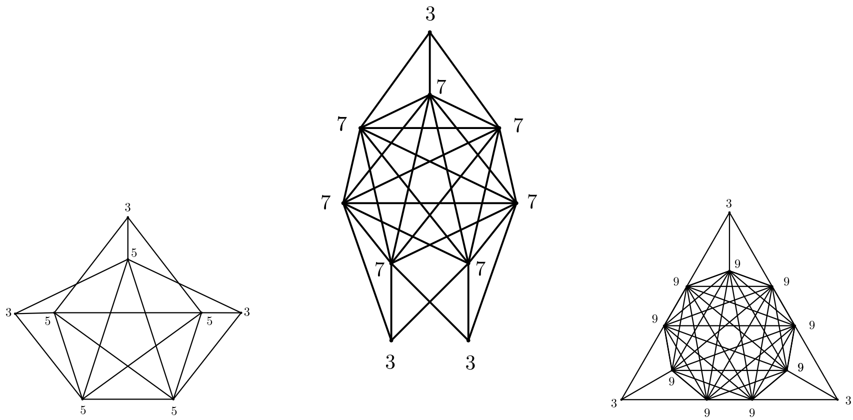


Рис. 4

Критерии оценки.

1) Имеются верные примеры без обоснования, что других нет — 1 балл.

2) Имеются верные примеры и доказательство, что в кружке чётное число людей — 2 балла.

11 класс

1. Решить уравнение $x^2-2x\sin(ax)+1=0$ при всех значениях параметра a.

Ответ: При $a=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n \quad x=\pm 1$; при $a\neq\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$ решений нет.

Решение. Первый способ. $x^2-2x\sin(ax)+1=0 \Leftrightarrow$

$x^2-2x\sin(ax)+\sin^2(ax)+\cos^2(ax)=0 \Leftrightarrow$

$(x-\sin(ax))^2+\cos^2(ax)=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x-\sin(ax)=0 \\ \cos(ax)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax=\dfrac{\pi}{2}+\pi n \\ x-\sin(ax)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} ax=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n \\ x=\sin(ax) \end{cases} \\ \begin{cases} ax=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n \\ x=\sin(ax) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} ax=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n \\ x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} ax=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n \\ x=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n \\ x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\dfrac{\pi}{2}-2\pi n \\ x=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n \\ x=\pm 1 \end{cases}$$

Второй способ. Квадратное уравнение имеет решение при условии $\dfrac{D}{4}=\sin^2(ax)-1\geqslant 0$.

Следовательно

$$\sin^2(ax)\geqslant 1 \Longrightarrow \begin{cases} \sin(ax)=\pm 1 \\ D=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ax=\pm\dfrac{\pi}{2}+2\pi n \\ x=\sin(ax). \end{cases}$$

Продолжение, как в решении 1.

Третий способ. $x=0$ — не является решением уравнения. Преобразуем равенство к виду $\sin(ax)=\dfrac{x^2+1}{2x}$. Рассмотрим функции $y=$

$= \sin(ax)$, $y \in [-1; 1]$ и $y = \dfrac{x^2+1}{2x}$, $y \in (-\infty;\ -1] \cup [1;\ \infty)$. Исследование может быть проведено с помощью производной. Следовательно, равенство возможно, если $y = \pm 1$. Тогда $x = \pm 1$ при $a = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Критерии оценки.

1) Верный ответ без обоснований (или с неверным обоснованием) — 0 баллов.
2) Потеряны $x = 1$ или $x = -1$ или в ответ добавлены $a = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ — не более 3 баллов.

2. Из деревни Простоквашино в город поехал автобус. В городе автобус полчаса стоял на станции, а потом поехал обратно. По дороге в город автобус догнал почтальона Печкина, который ехал на велосипеде в город, а через 2 часа встретил его на обратном пути. Автобус вернулся в Простоквашино одновременно с тем, когда Печкин добрался до города. Сколько времени ехал почтальон Печкин из Простоквашино в город, если его скорость в четыре раза меньше скорости автобуса?

Ответ: 10 часов.

Решение. Первый способ. Расстояние, которое Печкин проезжает за 2 часа, обозначим L. Автобус между встречами находился в движении 1,5 часа. Раз он движется в 4 раза быстрее Печкина, то расстояние L он проезжает за 30 минут, а за 1,5 часа автобус проезжает расстояние 3L. Значит, расстояние от точки второй встречи до города также равно L. Получаем, что после второй встречи, Печкин будет ехать до города ещё 2 часа, а автобус проедет за это время расстояние 4L. Тогда расстояние между городами 5L, которое Печкин проедет за 10 часов.

Второй способ. Пусть v км/ч — скорость почтальона Печкина тогда скорость автобуса — $4v$ км/ч. Пусть также первая встреча автобуса и почтальона Печкина произошла на расстоянии x км от города. Тогда за 2 часа, которые прошли до второй встречи, почтальон Печкин проехал $2v$ км и оказался на расстоянии $x - 2v$ км от города, а автобус проехал расстояние $1{,}5 \cdot 4v = 6v$ км и оказался на расстоянии $6v - x$ км от города.

Следовательно, $x-2v=6v-x$, откуда $x=4v$. Значит, точка первой встречи находится от города на расстоянии, которое автобус проезжает за час, а точка второй встречи — на расстоянии, которое автобус проезжает за полчаса. Так как через 2 часа после второй встречи почтальон Печкин окажется в городе, а автобус в деревне Простоквашино, то автобусу на путь из города в деревню Простоквашино понадобилось 2,5 часа. Следовательно, почтальону Печкину на путь из деревни Простоквашино в город понадобится в 4 раза больше, то есть 10 часов.

Критерии оценки.

Ответ без обоснования — 1 балл.

3. Можно ли в клетках таблицы 3×3 расставить натуральные числа от 2 до 10 (в каждую клетку одно число, каждое число ровно один раз) так, чтобы произведения чисел в каждом квадрате 2×2 были равны?

Ответ: Нельзя.

Решение. Всего в таблице 3×3 четыре квадрата 2×2. Имеется ровно одна клетка, входящая во все четыре квадрата, четыре таких, что каждая входит ровно в два квадрата, и четыре, входящих ровно в один квадрат.

Предположим, что расставить числа таким образом возможно.

Среди чисел 2–10 есть ровно одно, делящееся на 7 — это 7. Раз оно войдет хотя бы в один квадрат, то все четыре произведения должны делиться на 7. Получаем, что 7 должно входить во все четыре квадрата, то есть стоять в центре.

Среди чисел 2–10 имеются кратные 5 и их ровно два: 5 и 10. Значит, все произведения кратны 5. Числа 5 и 10 должны войти в четыре произведения, при этом каждое может входить не более, чем в два произведения (так как в центральной клетке точно стоит 7). Получаем, что 5 и 10 могут стоять только в неугловых клетках, причём напротив друг друга:

–	5	–
–	7	–
–	10	–

Среди чисел 2–10 ровно три кратны 3: 3, 6, 9. Так как $9=3\cdot 3$, получаем, что все произведения делятся на 3^2. Число 9 может войти максимум в два квадрата. В третий квадрат 2×2 должны войти 3 и 6, но тогда в четвертый квадрат 2×2 войдет максимум одно из чисел 3 и 6.

Получаем, что расставить числа таким образом нельзя.

Критерии оценки.

Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

4. В основании пирамиды с вершиной S лежит квадрат $ABCD$. Три из её боковых рёбер имеют длины $AS=7$, $BS=DS=13$. Какие значения может принимать площадь квадрата $ABCD$?

Ответ: $[120; 288]$ или $[120; 288)$.

Решение. Известен следующий несложный факт (см. рис. 5). Сумма

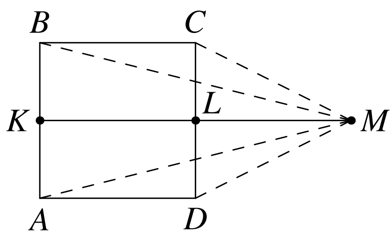


Рис. 5

квадратов расстояний от произвольной точки M на плоскости до двух противоположных вершин квадрата $ABCD$ равна сумме квадратов от неё до двух других противоположных вершин, т. е. $MA^2+MC^2=$ $=MB^2+MD^2$. Для доказательства этого утверждения нужно заметить, что эти суммы квадратов есть суммы квадратов четырёх отрезков (или равных им по длине), т. е.

$$MA^2+MC^2=MK^2+KA^2+ML^2+LC^2=$$
$$=MK^2+BK^2+ML^2+LD^2=MB^2+MD^2.$$

Отсюда понятно, что и для произвольной точки пространства это свойство также выполняется, так как в этом случае прибавляется удвоенный квадрат расстояния от точки M до плоскости, в которой лежит квадрат. Значит, из этого можно найти длину ребра SC, и она равна $CS = 17$. Заметим, что расстояние от вершины S пирамиды $SABCD$ до основания пирамиды будет не больше 7.

Рассмотрим случай, когда это расстояние SA равно 7. Тогда будет $SA \perp (ABCD)$, и диагональ квадрата будет равна $\sqrt{240}$, значит, площадь квадрата $ABCD$ будет равна 120. Заметим, что квадрат расстояния от вершины S до двух других вершин B и D квадрата будет равен $7^2 + 120 = 169$, т. е. именно нужным нам величинам. Значит, это одно из возможных крайних расположений нашей фигуры.

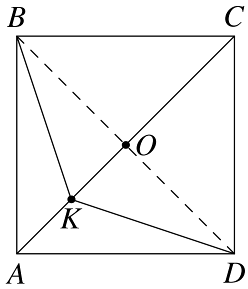


Рис. 6

Другим крайним расположением будет такое расположение, когда высота нашей пирамиды будет равна 0. В этом случае (см. рис. 6) все пять точек лежат в одной плоскости. Тогда диагональ равна $17 + 7 = 24$, а площадь 288. На диагонали AC также есть точка K, такая, что $OK = 5$, и расстояния от K до вершин B и D равны 13. Значит, вершина пирамиды S будет в этом случае совпадать с точкой K. То есть такое расположение вершин пирамиды также возможно. В этом случае площадь квадрата $ABCD$ будет равна 288.

Критерии оценки.

1) Просто за правильный ответ: 1 балл.

2) Если используют тот факт, что сумма квадратов расстояний до противоположных вершин квадрата от произвольной точки пространства равны, но не доказывают это, снимается 2 балла.

3) Если, при рассмотрении расстояния от вершины S до плоскости (ABC) равного 0 или 7, не подтверждают тот факт, что расстояния до вершин B и D также равны 13, то в этом случае задача считается нерешённой, так как не обосновано, что такое расположение всех точек в пространстве будет удовлетворять всем условиям задачи, и ставится не более 3 баллов. Это верно для обоих случаев.

4) За использование факта, что расстояние от вершины S до плоскости не больше 7, но неявное использование этого, баллов не снимается.

5) Возможен любой из указанных вариантов ответа или оба. За написание только одного баллы не снимаются. Ученики могут понимать по-разному пространственные фигуры: если вершина пирамиды лежит в плоскости её основания, то пирамида может считаться вырожденной или вовсе не считаться пирамидой.

6) За правильное и обоснованное решение ставится 7 баллов.

5. В десятичной записи чётного числа M участвуют только цифры 0, 2, 4, 5, 7 и 9, некоторые цифры могут повторяться. Известно, что сумма цифр числа $2M$ равняется 31, а сумма цифр числа $M/2$ равняется 28. Какие значения может принимать сумма цифр числа M? Укажите все возможные ответы.

Ответ: 29, например, у числа 4522790.

Решение. Обозначим сумму цифр натурального числа $S(n)$. Известны следующие факты:

Лемма 1. Пусть n — натуральное число. Тогда количество нечётных цифр в числе $2n$ равняется количеству переносов при сложении $n + n$.

Доказательство. Понятно, что если складываются две одинаковые цифры, то должна быть чётная цифра. Значит, если цифра нечётная, то предыдущие цифры в одинаковых слагаемых были не меньше 5.

Лемма 2. Пусть n — натуральное число. Тогда количество цифр в числе n, больше или равных 5, равняется количеству переносов при сложении $n + n$.

Доказательство. Утверждение достаточно очевидное, не требует доказательства.

Лемма 3. Пусть m и n — натуральные числа. Тогда $S(n + m) = S(n) + S(m) - 9k$, где k равно количеству переносов при сложении n и m.

Доказательство. Заметим, что если сумма двух цифр a и b не больше 9, тогда просто выполняется равенство

$$S(a) + S(b) = S(a + b),$$

что соответствует доказываемому равенству. Если сумма двух цифр a и b больше 9, тогда выполняется равенство

$$S(a) + S(b) = S(a + b) - 9.$$

Теперь, когда мы выполняем суммирование двух произвольных чисел, происходит следующее: если сумма двух цифр (плюс 1, если был перенос, или без неё) не превосходит 9, тогда получаемая цифра или равна сумме цифр слагаемых (+1 или без неё), или является последней цифрой суммы, т. е. теряется одна девятка. Если такие переносы выполняются и для других цифр, то при каждом переносе теряется по одной девятке.

Продолжим решение задачи. Пусть N — количество нечётных цифр в числе M, т. е. это (согласно условию) количество цифр в числе M больших или равных 5 (в нашем числе нечётные цифры, это только цифры 5,7 и 9). Тогда по лемме 1 при сложении $M/2$ и $M/2$ было ровно N переносов, откуда по лемме 3 имеем

$$S(M) = 2S(M/2) - 9N = 56 - 9N.$$

По лемме 2 при сложении M и M также было N переносов, откуда по лемме 3 имеем

$$S(2M) = 2S(M) - 9N = 31.$$

Поэтому имеем, что, $S(M)=56-9N=(31+9N)/2$. Отсюда $S(M)=29$.

Критерии оценки.

1) Просто за правильный ответ: 0 баллов.
2) Если задача полностью решена и в решении используются леммы, т. е. факты про сумму цифр, но они не обосновываются, тогда снимается не более трёх баллов, но задача считается решённой.
3) Если ответ получен, но нет примера того, что такое возможно, т. е. не приведён пример числа с требуемыми свойствами, можно снять 1 балл, но можно и не снимать. Это на усмотрение жюри.