7 класс

1. Можно ли разрезать квадрат на 2024 квадратов (не обязательно равных между собой)?

2. Петя написал на доске пример на умножение и зашифровал его, заменив каждую цифру буквой: одинаковые цифры — одинаковыми буквами, разные — разными. В итоге получилось $аб\times вг = ддее$. Докажите, что Петя где-то ошибся.

3. Имеется 4 палочки длиной по 1 см, 4 палочки по 2 см, 6 палочек по 3 см и 5 палочек по 4 см. Можно ли, использовав все эти палочки, сложить
   а) какой-нибудь прямоугольник;
   б) прямоугольник, у которого одна сторона вдвое длиннее другой;
   в) прямоугольник, у которого одна сторона вчетверо длиннее другой;
   г) квадрат?

4. На дороге между горными селениями А и Б нет горизонтальных участков. Машина без остановок проехала по ней от А до Б и вернулась обратно, потратив на весь путь 6 часов. При этом в гору она всегда ехала со скоростью 15 км/ч, а под гору — со скоростью 30 км/ч. Чему равна длина дороги?

5. Среди 100 отдыхающих провели анкету. Оказалось, что 95 из них были в Москве, 85 — в Санкт-Петербурге, 75 — в Сочи и 65 — в Калининграде. Докажите, что не менее 20 из них побывали во всех четырёх городах.

8 класс

1. На викторине было предложено 20 вопросов. За верный ответ начислялось 12 очков, за неверный — списывалось 10 очков. Петя Иванов дал ответы на все вопросы и получил 86 очков. Сколько раз он ошибся?

2. Верно ли, что:

   а) существует четырёхугольник, который можно двумя прямыми рассечь на 6 кусков;

   б) куб со стороной 3 см нельзя распилить на кубики со стороной 1 см меньше, чем шестью распилами?

   Если верно, то объясните почему.

3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BD и CE. Известно, что $BD = BC$, а $CE = EA$. Найдите углы треугольника ABC.

4. Натуральное число k записывается с помощью только нулей, единиц и двоек, причём единиц в его записи на одну больше, чем двоек. Докажите, что число $k + 2$ делится на 3.

5. В волейбольном турнире участвуют 10 команд, каждая играет с каждой один раз. За победу даётся 2 очка, за поражение — 0, ничьих в волейболе не бывает. Может ли случиться, что в итоге турнира какие-то четыре команды в совокупности наберут на 8 очков больше, чем остальные шесть?

9 класс

1. Что больше 15^{15} или 3^{40}?

2. Можно ли в каждую клетку квадратной таблицы 5×5 вписать одно из чисел $-1, 0, 1$ так, чтобы все суммы чисел, стоящих в каждой из строк, каждом из столбцов и на каждой из двух диагоналей были различными?

3. Решите уравнение
$$(x^3 - 7x^2 - 5x + 75)^2 + (x^3 - 9x^2 - 5x + 93)^2 = 0.$$

4. Две прямые пересекаются под углом в $30°$. Точка K находится на расстоянии 1 от одной из прямых и на расстоянии $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ от другой. На каком расстоянии находится точка K от точки пересечения прямых?

5. В каждой из трёх коробок лежит по 50 спичек. Двое играющих по очереди берут любое большее 0 число спичек из любой коробки, но только из одной. Выигрывает тот, кто берет последнюю спичку. Докажите, что тот, кто ходит первым, может выиграть, как бы ни играл его партнер.

10 класс

1. Функция f задана формулой $f(x) = \dfrac{\frac{1-5x}{1+5x}+\frac{1+x^5}{1-x^5}}{\frac{1+5x}{1-5x}+\frac{1-x^5}{1+x^5}}$. Найдите произведение $f(2024) \times f(-2024)$.

2. Даны 2024 числа: $1,\ 11,\ 111,\ \ldots,\ \underbrace{11\ldots11}_{2024}$. Сколько среди них чисел, делящихся на 7?

3. В параллелограмме $ABCD$, у которого $AB = 2AD$ и $\angle BAD = 60°$, проведены биссектрисы всех углов. Пересекаясь, они образуют четырёхугольник. Найдите
   а) углы этого четырёхугольника;
   б) отношение площади четырёхугольника к площади параллелограмма.

4. Можно ли из 6 стальных прутов длиной по 1 м вырезать заготовки так, чтобы получилось 20 заготовок длиной по 21 см, 9 — длиной по 12 см, 4 — длиной по 9 см и 11 — длиной по 3 см (толщиной распилов пренебрегаем)?

5. В турнире участвуют 6 команд, каждая играет с каждой один раз. За победу даётся 2 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0. Может ли случиться, что в итоге турнира какие-то три команды в совокупности наберут на 4 очка больше, чем остальные три, если
   а) турнир футбольный;
   б) турнир волейбольный (ничьих не бывает)?

11 класс

1. Функция f задана формулой $f(x) = \dfrac{\frac{2+\sin x}{2-\sin x}+\frac{x(1+\cos x)}{1+x^2}}{\frac{2-\sin x}{2+\sin x}-\frac{x(1+\cos x)}{1+x^2}}$. Найдите произведение $f(2024) \times f(-2024)$.

2. Докажите, что если в сечении куба плоскостью получился треугольник, то этот треугольник остроугольный.

3. Для каждого значения параметра a укажите, сколько решений имеет

   а) система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y=a; \end{cases}$

   б) уравнение $|1-|1-x||=a$.

4. В круг радиуса 1 вписан пятиугольник. Докажите, что сумма всех его сторон и диагоналей меньше 17.

5. На окружности расположены 15 чёрных и 15 белых фишек. За один ход разрешается поменять местами любые две из них. За какое наименьшее число ходов можно из любого начального расположения фишек перейти к такому, в котором белые и чёрные фишки чередуются?