

7 КЛАСС

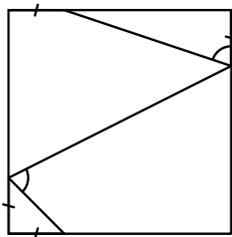
1. Замените цифрами буквы A, B, C, D так, чтобы получилось верное равенство:

$$AAAA + BBB - CC + D = 2023.$$

2. Составьте из прямоугольников $1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3, \dots, 1 \times 17$ прямоугольник, каждая сторона которого больше 1.
3. Маше задано выучить английские глаголы и существительные. Утром она выучила $\frac{1}{12}$ всех глаголов и $\frac{1}{16}$ всех существительных, всего 5 слов. Вечером она выучила ещё $\frac{1}{4}$ всех оставшихся глаголов и $\frac{1}{5}$ всех оставшихся существительных. Оказалось, что вечером Маша выучила на 8 глаголов больше, чем существительных. Сколько существительных и сколько глаголов было задано Маше?
4. В футбольном турнире участвовало 20 команд (каждая команда сыграла с другими по одному матчу). Могло ли в результате оказаться так, что каждая из команд-участниц выиграла столько же матчей, сколько сыграла вничью?
5. По кругу каким-то образом расставили все натуральные числа от 1 до 15 (каждое число встречается один раз). Для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего.
- а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 7?
- б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 8?
- Не забудьте объяснить свой ответ.

8 КЛАСС

1. Используя каждую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ровно по одному разу, знаки арифметических действий и скобки, получите число 2023.
2. Агроном Василий Иванович заметил, что если бы длина его прямоугольного поля была больше на 20 метров, то периметр поля был бы больше в 2 раза. А если бы ширина поля была больше в 2 раза, то периметр поля был бы больше на 18 метров. Чему равна площадь поля?
3. На сторонах квадрата отложили 4 равных отрезка (как на рисунке). Докажите, что два отмеченных угла равны.



4. Имеется 7 одинаковых по внешнему виду монет. Среди них 5 настоящих (все одинакового веса) и две фальшивые (вешат одинаково, но легче настоящих). Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь найти три настоящие монеты?
5. Какое наибольшее количество клеток можно отметить на шахматной доске так, чтобы с любой из них на любую другую отмеченную клетку можно было пройти ровно двумя ходами шахматного коня?

9 КЛАСС

1. Найдите какое-нибудь натуральное число, которое делится на 2023, а сумма его цифр равна 2023.
2. Можно ли представить в виде суммы квадратов выражение:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 5y + 7x + xz + 1 ?$$

3. Два равных прямоугольных треугольника ABC и CDK имеют общий прямой угол C . Докажите, что медиана CM треугольника ABC перпендикулярна стороне DK треугольника CDK .
4. Можно ли разложить 225 камешков в 15 куч так, чтобы не было куч с равным количеством камешков, однако после произвольного деления любой кучи на две меньших, это свойство нарушалось?
5. Фигура «принц» может ходить на одну клетку вверх, или на одну клетку вправо, или на одну клетку по диагонали влево вниз. Может ли «принц», начиная из левого верхнего угла доски 8×8 клеток, обойти всю доску, побывав на каждой клетке ровно по одному разу?

10 КЛАСС

1. Решите уравнение в целых числах $x^2 + x + 1 = y^2$.
2. Найдите значения a и b , при которых выражение $a^3 + b^3 + ab$ принимает наименьшее значение, если известно, что $a + b = 1$.
3. Окружность, описанная около треугольника ABC , пересекает биссектрису внешнего угла треугольника при вершине A в точке N , лежащей на дуге AB (N отлична от A). Докажите, что $NB = NC$.
4. У Винни Пуха и Пятачка было по коробке конфет, в которых одинаковое число конфет, и они ждали в гости друзей. Пятачок разложил конфеты из своей коробки на 8 блюдец поровну, а остаток — меньше 8 — положил себе в карман. Винни Пух разложил часть конфет из своей коробки на другие 9 блюдец поровну, а остальные (их было больше 9) — положил себе в карман. После того, как Винни Пух положил себе в карман ещё и все конфеты с одного блюда Пятачка, у него в кармане стало 60 конфет. Сколько конфет в кармане Пятачка?
5. Разрешаются следующие преобразования четвёрок (a, b, c, d) целых чисел:

$$(1) (b, a, c, d);$$

$$(2) (a, b, d, c);$$

$$(3) (a + d, b, c + b, d);$$

$$(4) (a, b - c, c, d - a).$$

Можно ли с помощью некоторого числа указанных преобразований перейти от четвёрки $(20, 20, 23, 23)$ к четвёрке $(2020, 2020, 2023, 2023)$?

11 КЛАСС

1. Решите уравнение $x^3 + 3x^2 + 3x + 3 = 0$.
2. Пусть $S(N)$ — сумма цифр натурального числа N . Найдите все такие N , для которых справедливо равенство $N + S(N) = 2023$.
3. Вписанный четырёхугольник $ABCD$ не имеет параллельных сторон. Лучи BA и CD пересекаются в точке E , а лучи AD и BC — в точке F . Докажите, что если $AE = CF$, то $DE = DF$.
4. На отрезке $[0, 1]$ числовой прямой расположены три точки a, b, c . Докажите, что найдётся точка x из отрезка $[0, 1]$ такая, что

$$\frac{1}{|x - a|} + \frac{1}{|x - b|} + \frac{1}{|x - c|} < 20.$$

5. Можно ли разбить множество чисел $1, 2, 3, \dots, 2022, 2023$ на два подмножества таким образом, чтобы сумма чисел одного подмножества равнялась произведению чисел второго?