7 класс

1. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Через некоторое время навстречу ему из B в A вышел второй пешеход. Пешеходы встретились на одной трети расстояния AB от пункта A. Придя в A второй пешеход тут же повернул обратно, но первого пешехода он догнал только в пункте B. Во сколько раз его скорость превышает скорость первого пешехода?

2. Представить число 294 в виде суммы четырёх слагаемых таких, что если одно из них умножить на 6, второе разделить на 6, к третьему прибавить 6, а из четвёртого вычесть 6, то получится одно и то же число.

3. Найти все целые числа n, для которых выполняется равенство
$$(n-1)(n+3)(n-5)\ldots(n+2019)(n-2021) =$$
$$= (n+2)(n-4)(n+6)\ldots(n-2020)(n+2022).$$

4. «Ограниченной ладьёй» называется шахматная фигура, которая ходит и бьёт как обычная ладья, но только на одну или две клетки. Какое наибольшее число «ограниченных ладей» можно расставить на доске 7×7 так, чтобы они не били друг друга?

5. У Васи есть семь внешне одинаковых монет, четыре из которых настоящие и все одного веса, а оставшиеся три фальшивые (более лёгкие и одного веса). Сможет ли Вася найти хотя бы одну фальшивую монету за два взвешивания на чашечных весах без гирь? Ответ обосновать.

8 класс

1. Найдите такие различные целые положительные числа x и y, для которых выполняется равенство $x^2 + 4x = y^2 + 4y$.

2. Винтик и Шпунтик делят одно и то же число. Винтик делит его на 11, а Шпунтик на 12. Сумма неполного частного Винтика и остатка Шпунтика равны 13. Найти остаток, который получил Винтик.

3. Два отрезка с концами на сторонах AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ проходят через точку пересечения его диагоналей и оба делятся этой точкой пополам. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

4. Дан правильный 15-угольник. Можно ли расставить в его вершинах цифры $1, 2, 3, 4, 5, 6$ так, чтобы для любой пары различных цифр нашлась сторона многоугольника, концы которой занумерованы этими цифрами?

5. У Васи есть семь внешне одинаковых монет, четыре из которых настоящие и все одного веса, а оставшиеся три фальшивые (более лёгкие и одного веса). Сможет ли Вася найти хотя бы одну фальшивую монету за два взвешивания на чашечных весах без гирь? Ответ обосновать.

9 класс

1. Докажите, что если числитель дроби $\dfrac{k^2-5k+8}{k^2+6k+19}$ при некотором целом значении k делится на 11, то эта дробь сократима.

2. На графике функции $y = \left|1-2\left|x\right|\right|$ найти точку, ближайшую к точке $A(1;0)$.

3. Числа p, q и $pq+3$ простые. Докажите, что $(2p+q)(p+2q)$ делится на 4.

4. В группу продленного дня ходят 17 мальчиков и 29 девочек. Среди мальчиков — 9 послушных, остальные — непослушные. Среди девочек — 15 послушных, остальные — непослушные. Сколькими способами можно выбрать команду из трёх детей, среди которых найдётся ровно два послушных ребенка, и ровно две девочки?

5. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AX и BY. Перпендикуляры к прямой XY, проведённые через точки X и Y, пересекают сторону AB в точках M и N соответственно. Докажите, что $AM = NB$.

10 класс

1. От Цветочного города до Зелёного города пароход плывёт два дня, а от Цветочного города до Солнечного — пять дней. Сколько дней будет плыть плот от Солнечного города до Зелёного города, если на этот же путь пароход затрачивает в десять раз меньше дней? Солнечный город стоит выше по течению, чем Цветочный город, а Цветочный город стоит выше по течению, чем Зелёный город.

2. Графики функций $y = x^2 + px + q$ и $y = qx + p$ касаются. Известно, что абсцисса точки касания положительна. Найдите её.

3. Квадрат 8×8 разрезали на квадраты 2×2 и прямоугольники 1×2 так, что каждый прямоугольник 1×2 граничит по некоторому отрезку с квадратом 2×2. Какое наименьшее число квадратов 2×2 может быть в таком разрезании?

4. В треугольнике ABC угол C прямой. Высота CH этого треугольника пересекает биссектрису AM в точке K. Найдите AC, если $AB = 20$, а $AK : KM = 4 : 3$.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 + a[x] + a^2 = 0$$

имеет решения во множестве действительных чисел. Здесь $[x]$ — целая часть x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее числа x.

11 класс

1. Однажды утром из дворца вышел великан. Одновременно навстречу ему из пещеры выбежал гном. Известно, что до момента встречи великан успел пройти треть пути между дворцом и пещерой, однако, если бы великан вышел на час раньше, то он успел бы пройти до встречи половину пути. Через сколько минут после выхода великана гном и великан встретились?

2. В ящике лежат чёрные и белые шары. Вероятность достать из этого ящика чёрный шар равна 0,2. Если добавить в этот ящик 12 чёрных шаров, то вероятность достать чёрный шар изменится и будет равна 0,25. Сколько всего шаров находится в ящике?

3. Даны натуральные числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2022}, a_{2023}$. Известно, что $a_1 > a_0$, $a_2 = 4a_1 - 3a_0$, $a_3 = 4a_2 - 3a_1$, …, $a_{2023} = 4a_{2022} - 3a_{2021}$. Докажите, что $a_{2023} > 3^{2022}$.

4. В треугольнике ABC угол C прямой. Высота CH этого треугольника пересекает биссектрису AM в точке K. Найдите AC, если $AB = 20$, а $AK : KM = 4 : 3$.

5. У Незнайки есть несколько карточек, на каждой из которых написано по одному положительному числу. Среди всех чисел на карточках не менее пяти различных. Оказалось, что для любых двух карточек можно указать две другие карточки, произведение чисел на которых такое же, как на первых двух. Какое наименьшее количество карточек может быть у Незнайки?