Решения задач муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике

2022–2023 учебный год

Ижевск, 2022

Рекомендации к проверке

Список задач для каждого класса состоит из пяти заданий разной сложности. Каждая задача оценивается максимально в 7 баллов. При этом частичное продвижение в решении задачи также должно быть оценено определённым количеством баллов (не более 7). Для согласованности оценок к каждой задаче приведены критерии оценки. Почти у всех задач критерии написаны на основании «приведённого» к задаче решения. В случае «другого» решения нужно выработать другие критерии в соответствии с общими требованиями к критериям.

7 класс

1. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Через некоторое время навстречу ему из B в A вышел второй пешеход. Пешеходы встретились на одной трети расстояния AB от пункта A. Придя в A второй пешеход тут же повернул обратно, но первого пешехода он догнал только в пункте B. Во сколько раз его скорость превышает скорость первого пешехода?

   Ответ: в 2 раза.

   Решение. Обозначим через S расстояние между пунктами A и B. Тогда между первой и второй встречами второй пешеход прошёл расстояние $\frac{4S}{3}$, а первый за то же время прошёл $\frac{2S}{3}$.

   Критерии оценки.

   1) Только за ответ — 0 баллов
   2) За арифметические ошибки, но верное решение — не более 3 баллов.
   3) За правильный ответ с полным обоснованием — 7 баллов.

2. Представить число 294 в виде суммы четырёх слагаемых таких, что если одно из них умножить на 6, второе разделить на 6, к третьему прибавить 6, а из четвёртого вычесть 6, то получится одно и то же число.

   Ответ: $294 = 6 + 216 + 42 + 30$.

   Решение. По условию задачи существует число x такое, что

   $$\frac{x}{6} + 6x + (x + 6) + (x - 6) = 294.$$

   Решая это уравнение, находим $x = 36$. Тогда искомые четыре числа $36 : 6 = 6$, $36 \cdot 6 = 216$, $36 + 6 = 42$, $36 - 6 = 30$.

Критерии оценки.

1) За правильный ответ с примером — 7 баллов.
2) За неправильный подбор чисел — 0 баллов.

3. Найти все целые числа n, для которых выполняется равенство

$$(n-1)(n+3)(n-5)\dots(n+2019)(n-2021) = \\ = (n+2)(n-4)(n+6)\dots(n-2020)(n+2022).$$

Ответ: таких целых чисел нет.

Решение. Если n чётно, то слева нечётное число, а справа чётное. Равенство невозможно. Если n нечётно, то слева чётное число, а справа нечётное. Равенство невозможно. Решений в целых числах нет.

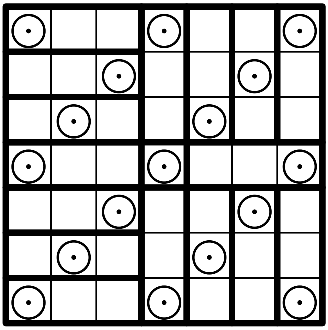
Критерии оценки.

1) Рассмотрен только один случай — 2 балла.

4. «Ограниченной ладьёй» называется шахматная фигура, которая ходит и бьёт как обычная ладья, но только на одну или две клетки. Какое наибольшее число «ограниченных ладей» можно расставить на доске 7×7 так, чтобы они не били друг друга?

Ответ: 17.

Решение. Разрежем доску 7×7 на 16 триминошек (прямоугольников 3×1) и 1 клетку. В каждой триминошке не более одной ладьи, значит, всего ладей не более 17. А 17 ладей расставить можно, например, так как показано на рисунке.



Критерии оценки.

1) За правильный ответ с полным обоснованием — 7 баллов.
2) За верный ответ, и небольшое обоснование — не более 1 балла.
3) За использование идеи разрезания доски на части 1×3 — 1 балл.

5. У Васи есть семь внешне одинаковых монет, четыре из которых настоящие и все одного веса, а оставшиеся три фальшивые (более лёгкие и одного веса). Сможет ли Вася найти хотя бы одну фальшивую монету за два взвешивания на чашечных весах без гирь? Ответ обосновать.

   Ответ: сможет.

   Решение. Занумеруем монеты числами от 1 до 7. Первым взвешиванием сравним одну пару монет (1 и 2) с другой парой монет (3 и 4).

   Первый случай. Если во взвешивании наступило равновесие, то в парах либо нет фальшивых монет, либо по одной. Тогда вторым взвешиванием сравним оставшиеся три монеты (5, 6 и 7) и первые три монеты (1, 2 и 3). Если легче набор (5, 6, 7) то фальшивые эти три монеты. Если легче набор (1, 2, 3), то фальшивая монета 3. Если равновесие, то фальшивая монета 4.

   Второй случай. Если перевесила одна из пар, для определённости будем считать, что это пара (1, 2). Тогда в паре (3, 4) есть хотя бы одна фальшивая монета. Вторым взвешиванием сравним эти две монеты.

Если наступило равновесие, то обе монеты фальшивые. Если какая-то монета оказалась легче, то она фальшивая.

Критерии оценки.

1) Если неверное решение — 0 баллов.
2) Только верный ответ — 0 баллов.
3) Если верное решение — 7 баллов.

8 класс

1. Найдите такие различные целые положительные числа x и y, для которых выполняется равенство $x^2 + 4x = y^2 + 4y$.

   Ответ: нет решений.

   Решение. Перепишем данное равенство в следующем виде:

$$x^2 + 4x - y^2 - 4y = 0.$$

   Разложим левую часть равенства на множители: $(x-y)(x+y+4) = 0$. Первый множитель отличен от нуля, следовательно, $x+y+4 = 0$. Этот множитель также отличен от нуля, так как $x + y + 4 > x + y > 0$.

   Критерии оценки.

   1) Если приведён правильный ответ без обоснования — 1 балл.
   2) Если верно выполнено разложение на множители — 2 балла.
   3) Если предложено верное решение — 7 баллов.

2. Винтик и Шпунтик делят одно и то же число. Винтик делит его на 11, а Шпунтик на 12. Сумма неполного частного Винтика и остатка Шпунтика равны 13. Найти остаток, который получил Винтик.

   Ответ: 1.

   Решение. Пусть искомое число равно n. Тогда $n = 11t_1 + r_1$ и $n = 12t_2 + r_2$. Следовательно

$$11t_1 + r_1 = 12t_2 + r_2, \quad (1)$$
$$t_1 + r_2 = 13. \quad (2)$$

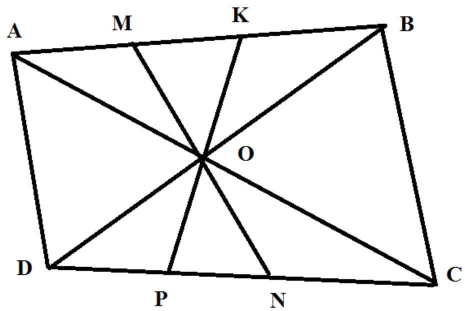
   Выражаем из (2) $r_2 = 13 - t_1$ и подставляем это в (1). Получаем, что $12(t_1 - t_2) = 13 - r_1$. Отсюда понятно, что $r_1 = 1$, так как слева выражение делится на 12, и r_1 – остаток при делении на 11, т. е. меньше 11. Несложно проверить, что такие числа есть, например, число $111 = 11 \cdot 10 + 1 = 12 \cdot 9 + 3$.

Критерии оценки.

1) За ответ — 1 балл
2) За подбор и рассмотрение конкретного примера — 1–2 балла.
3) За арифметические ошибки, но верное решение, не более 3 баллов.
4) За правильный ответ с полным обоснованием — 7 баллов.

3. Два отрезка с концами на сторонах AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ проходят через точку пересечения его диагоналей и оба делятся этой точкой пополам. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

Решение.



Треугольники MOK и NOP равны по двум сторонам и углу между ними (углы вертикальные). Тогда равны углы OMK и ONP. Соответственно равны и смежные с ними углы OMA и ONC. Тогда равны треугольники OMA и ONC по стороне и двум прилежащим к ней углам. Отсюда следует, что $OA = OC$. Аналогично доказываем, что $OB = OD$. Тогда по признаку параллелограмма получаем, что $ABCD$ — параллелограмм.

Критерии оценки.

1) Если доказана параллельность только одной пары сторон — 3 балла.

4. Дан правильный 15-угольник. Можно ли расставить в его вершинах цифры $1, 2, 3, 4, 5, 6$ так, чтобы для любой пары различных цифр нашлась сторона многоугольника, концы которой занумерованы этими цифрами?

   Ответ: нельзя.

   Решение (идея). Так как каждая цифра должна быть в паре с 5-ю остальными, то каждая цифра должна встретиться, по крайней мере 3 раза, т. е. всего вершин должно быть 18, а не 15.

   Критерии оценки.

   1) За правильный ответ с нужным построением — 7 баллов.

   2) Просто за ответ — 0 баллов.

5. У Васи есть семь внешне одинаковых монет, четыре из которых настоящие и все одного веса, а оставшиеся три фальшивые (более лёгкие и одного веса). Сможет ли Вася найти хотя бы одну фальшивую монету за два взвешивания на чашечных весах без гирь? Ответ обосновать.

   Ответ: сможет.

   Решение. Занумеруем монеты числами от 1 до 7. Первым взвешиванием сравним одну пару монет (1 и 2) с другой парой монет (3 и 4).

   Первый случай. Если во взвешивании наступило равновесие, то в парах либо нет фальшивых монет, либо по одной. Тогда вторым взвешиванием сравним оставшиеся три монеты (5, 6 и 7) и первые три монеты (1, 2 и 3). Если легче набор (5,6,7) то фальшивые эти три монеты. Если легче набор (1, 2, 3), то фальшивая монета 3. Если равновесие, то фальшивая монета 4.

   Второй случай. Если перевесила одна из пар, для определённости будем считать, что это пара (1, 2). Тогда в паре (3, 4) есть хотя бы одна фальшивая монета. Вторым взвешиванием сравним эти две монеты. Если наступило равновесие, то обе монеты фальшивые. Если какая-то монета оказалась легче, то она фальшивая.

Критерии оценки.

1) Если неверное решение — 0 баллов.
2) Только верный ответ — 0 баллов.
3) Если верное решение — 7 баллов.

9 класс

1. Докажите, что если числитель дроби $\dfrac{k^2-5k+8}{k^2+6k+19}$ при некотором целом значении k делится на 11, то эта дробь сократима.

   Решение. Запишем знаменатель дроби в виде: $k^2+6k+19=(k^2-5k+8)+11k+11$. Первое слагаемое кратно 11, следовательно, знаменатель делится на 11, а значит дробь сократима.

   Критерии оценки.

   1) Возможно решение с помощью перебора по остаткам. Если перебор полный, то решение оценивается в 7 баллов. Если не рассмотрен хотя бы один случай, то за решение ставится 0 баллов.
   2) Если предложено верное решение — 7 баллов.

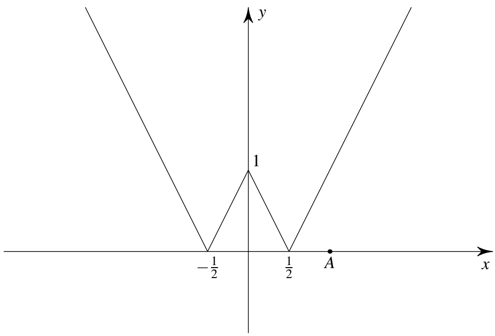
2. На графике функции $y=|1-2|x||$ найти точку, ближайшую к точке $A(1;0)$.

   Ответ: точка $\left(\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)$.

   Решение. Для построения графика функции можно использовать метод преобразований из графика функции $y=|x|$ в следующей последовательности:

$\lvert x\rvert \to 2\lvert x\rvert$	*растяжение в 2 раза вдоль оси Oy*
$2\lvert x\rvert \to 2\lvert x\rvert-1$	*сдвиг на одну единицу вниз*
$2\lvert x\rvert-1 \to \lvert 2\lvert x\rvert-1\rvert$	*симметричное отражение части графика, расположенной ниже оси Ox на верхнюю полуплоскость*

Таким образом, получим рисунок:



Из рисунка видно, точка на графике ближайшая к точке A лежит на правой ветви графика, то есть на полупрямой $y = 2x - 1$, $y \geqslant 0$. Тогда квадрат расстояния от точки на этой полупрямой до точки A равен

$$d^2 = (x-1)^2 + (2x-1)^2 = 5x^2 - 6x + 2.$$

Если выделить полный квадрат, получим $d^2 = 5\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}$. Из этого выражения видно, что расстояние от точки A до указанной полупрямой будет принимать наименьшее значение при $x = \frac{3}{5}$, это значение будет служить абсциссой искомой точки. Значение ординаты этой точки равно $y = 2 \cdot \frac{3}{5} - 1 = \frac{1}{5}$.

Критерии оценки.

1) Правильно построен график функции — 1 балл.
2) Правильно построено выражение для расстояния между точками (или его квадрата), но преобразования выполнены неверно — 3 балла.
3) Приведён ответ без решения — 0 баллов.

3. Числа p, q и $pq + 3$ простые. Докажите, что $(2p + q)(p + 2q)$ делится на 4.

Решение. Так как $pq + 3 > 3$ и оно простое, следовательно $pq + 3$ — нечётное. Поэтому одно из чисел p или q — чётное. Если, например, $p = 2$, то

$$(2p + q)(p + 2q) = 2(4 + q)(1 + q),$$

при этом один из сомножителей $4 + q$ или $1 + q$ — чётное число. Значит, всё произведение делится на 4.

Критерии оценки.

1) За правильный ответ с полным обоснованием — 7 баллов.
2) За замечание того, что одно из чисел 2, можно дать 1 балл.
3) За арифметические ошибки, но верное решение, не более 3 баллов.

4. В группу продленного дня ходят 17 мальчиков и 29 девочек. Среди мальчиков — 9 послушных, остальные — непослушные. Среди девочек — 15 послушных, остальные — непослушные. Сколькими способами можно выбрать команду из трёх детей, среди которых найдётся ровно два послушных ребенка, и ровно две девочки?

Ответ: 2730.

Решение. Введём обозначения для разных типов детей в группе. Послушные мальчики – ПМ. Непослушные мальчики – НМ. Послушные девочки – ПД. Непослушные девочки – НД. Тогда нас устраивают следующие команды: (ПМ, ПД, НД), (НМ, ПД, ПД). Теперь, используя правило умножения, найдём число способов для каждого типа команды.

Для (ПМ, ПД, НД) – $9 \times 15 \times 14 = 1890$.

Выбрать двух ПД, можно следующим образом. Сначала выбираем первую девочку 15 способами, затем вторую девочку 14 способами. При этом мы каждую пару посчитали дважды. Следовательно, всего способов $(15 \times 14):2 = 105$. Для (НМ, ПД, ПД) – $8 \times 105 = 840$. В итоге, используя правило сложения, найдём общее число способов выбрать команду, удовлетворяющий нашим ограничениям: $1890 + 840 = 2730$ способов.

Критерии оценки.

1) Если неверное решение — 0 баллов.
2) Только верный ответ — 1 балл.

3) Если верно рассмотрен только один случай, а другие отсутствуют — 1 балл.

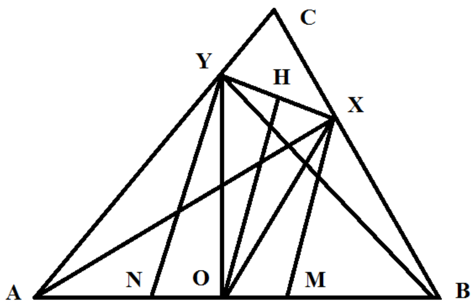
4) Если правильно вычислено число команд в одном из случаев, а в других допущены логические ошибки (например, отсутствует деление на 2) или второй случай решён верно, а в первом логическая ошибка — 3 балла.

5) Если верный ход рассуждений, но есть вычислительная ошибка на последнем шаге — 6 баллов.

6) Если верное решение — 7 баллов.

5. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AX и BY. Перпендикуляры к прямой XY, проведённые через точки X и Y, пересекают сторону AB в точках M и N соответственно. Докажите, что $AM = NB$.

Решение.



Отметим середину стороны AB — точку O (см. рис.) Тогда $OX = AO = BO$, так как треугольник ABX прямоугольный. Аналогично, $OY = AO = BO$, так как треугольник ABY прямоугольный. Значит, треугольник OXY равнобедренный. Проведём в нём высоту OH, которая является ещё и медианой. Тогда прямые NY, OH и MX параллельны между собой и по теореме Фалеса получаем, что $OM = NO$. Следовательно, $AM = AO + OM = BO + NO = NB$.

Критерии оценки.

1) Если неверное решение — 0 баллов.
2) Если доказано, что треугольник OXY равнобедренный — 3 балла.
3) Если верное решение — 7 баллов.

10 класс

1. От Цветочного города до Зелёного города пароход плывёт два дня, а от Цветочного города до Солнечного — пять дней. Сколько дней будет плыть плот от Солнечного города до Зелёного города, если на этот же путь пароход затрачивает в десять раз меньше дней? Солнечный город стоит выше по течению, чем Цветочный город, а Цветочный город стоит выше по течению, чем Зелёный город.

   Ответ: 60 дней.

   Решение. Пусть собственная скорость парохода x км в день, а скорость течения y км в день. Тогда скорость по течению равна $(x + y)$ км в день, а скорость против течения равна $(x - y)$ км в день. Тогда путь от Цветочного города до Зелёного города составляет $(2x + 2y)$ км, а путь от Цветочного города до Солнечного – $(5x - 5y)$ км. Следовательно, путь от Солнечного города до Зелёного города равен $(7x - 3y)$ км (соотношение 1).

   Так как пароход на путь от Солнечного города до Зелёного города затрачивает в десять раз меньше дней, то он плывёт в десять раз быстрее, чем плот. Значит, получаем уравнение: $x + y = 10y$, откуда $x = 9y$ (соотношение 2). Получаем, что расстояние от Солнечного города до Зелёного города равно: $7x - 3y = 63y - 3y = 60y$ км. Значит, плот плывёт 60 дней.

   Критерии оценки.

   1) Если неверное решение — 0 баллов.
   2) Если получено только соотношение 1 — 2 балла.
   3) Если получено только соотношение 2 — 2 балла.
   4) Если получены соотношения 1 и 2 — 4 балла.
   5) Если при верном ходе решения есть вычислительная ошибка — 5 баллов.
   6) Если верное решение — 7 баллов.

2. Графики функций $y = x^2 + px + q$ и $y = qx + p$ касаются. Известно, что абсцисса точки касания положительна. Найдите её.

   Ответ: $x_0 = 2$.

   Решение. Графики функций $y = x^2 + px + q$ и $y = qx + p$ имеют единственную общую точку. Следовательно, квадратное уравнение $x^2 + px + q = qx + p$ имеет один корень, и его дискриминант равен нулю:

$$D = (p - q)^2 + 4(p - q) = (p - q)(p - q + 4) = 0.$$

   Откуда, либо $p - q = 0$, либо $p - q + 4 = 0$. Подставляя значение $p - q$ в квадратное уравнение, получаем, что либо $x_0 = 0$, либо $x_0 = 2$. Первый корень посторонний.

Критерии оценки.

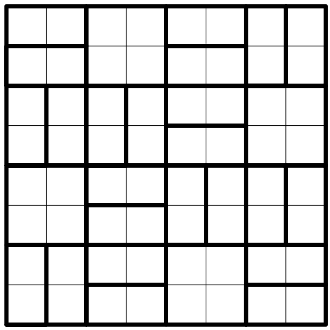
1) Если только один ответ — 0 баллов.
2) Если правильно получено квадратное уравнение, но оно не решено — 1 балл.
3) Если задача сведена к исследованию дискриминанта – 2 балла.
4) Если верно выполнено разложение на множители — 2 балла.
5) Если решение получено, но допущены ошибки при вычислении дискриминанта — не более 3 баллов.
6) Если предложено верное решение — 7 баллов.

3. Квадрат 8×8 разрезали на квадраты 2×2 и прямоугольники 1×2 так, что каждый прямоугольник 1×2 граничит по некоторому отрезку с квадратом 2×2. Какое наименьшее число квадратов 2×2 может быть в таком разрезании?

   Ответ: 4.

   Решение. Оценка. Квадрат граничит по отрезку не более чем с 8 прямоугольниками. Если квадратов не более трёх, то прямоугольники и квадраты занимают не более $3 \times 4 + 3 \times 8 \times 2 = 60$ клеток. А в квадрате

8×8 всего 64 клетки. Значит, квадратов не менее четырёх. Пример — см. рис.

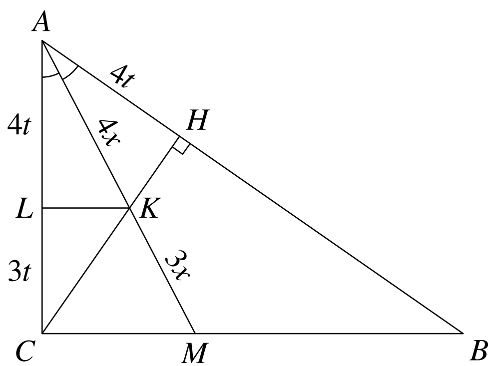


Критерии оценки.

1) Если неверное решение — 0 баллов.
2) Только верный ответ — 0 баллов.
3) Если доказана только оценка — 4 балла.
4) Если построен только пример — 3 балла.

4. В треугольнике ABC угол C прямой. Высота CH этого треугольника пересекает биссектрису AM в точке K. Найдите AC, если $AB = 20$, а $AK : KM = 4 : 3$.

Ответ: $\frac{80}{7}$.



Решение. Проводим $KL \parallel CM$, где точка L лежит на катете AC (см. рис.) Получаем равные прямоугольные треугольники ALK и AHK (по гипотенузе и острому углу). Отсюда $AL = AH$. Так как $AK:KM = 4:3$ (по условию), то по теореме о пропорциональных отрезках получаем, что $AL : LC = 4 : 3$. Отсюда, как уже было отмечено выше, $AL = AH = 4t$, а $LC = 3t$. Поэтому находим из прямоугольного треугольника ACH, что $\cos\angle CAH = \frac{4}{7}$. Отсюда $AC = AB\cos\angle A = \frac{80}{7}$.

Критерии оценки.

1) За правильный ответ — 1 балл.
2) За использование теоремы Фалеса, при проведении $LK \parallel BC$, если замечается, что $AL : LC = AK : KM = \frac{4}{3}$. Можно дать 1 балл.
3) Если найдено, что $AH : AC = 4 : 7$, но решение не закончено, то 3 балла.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 + a[x] + a^2 = 0$$

имеет решения во множестве действительных чисел. Здесь $[x]$ — целая часть x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее числа x.

Ответ: $a \in [0;\ 1)$.

Решение. Будем решать это уравнение относительно параметра a. Его дискриминант равен $D = [x]^2 - 4x^2$. Обозначим $[x] = n$. Тогда

$$D \geqslant 0 \iff -\frac{|n|}{2} \leqslant x \leqslant \frac{|n|}{2}.$$

Из определения целой части числа следует неравенство $n \leqslant x < n + 1$. Поэтому исходное уравнение будет иметь решения относительно параметра a для каждого значения x, для которого существует целое n, при котором выполняются неравенства

$$\begin{cases} -\dfrac{|n|}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{|n|}{2}, \\ \quad n \leqslant x < n + 1. \end{cases} \tag{3}$$

Если $n > 0$, то $\frac{n}{2} < n$, поэтому система (3) решений не имеет. Если $n = 0$, то единственное решение системы (3) $x = 0$. Если $n = -1$, то $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$. А при условии $n \leqslant -2$ выполняется неравенство $n + 1 < < -\frac{|n|}{2}$, поэтому система (3) решений не имеет. Запишем решения исходного уравнения

$$a_{1,2} = \frac{-n \pm \sqrt{n - 4x^2}}{2}.$$

При $x = 0$ получаем $a_1 = a_2 = 0$. При $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$ находим

$$a_1 = \frac{-n + \sqrt{n - 4x^2}}{2} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right),$$
$$a_2 = \frac{-n - \sqrt{n - 4x^2}}{2} \in \left(0, \frac{1}{2}\right].$$

Таким образом, параметр a может принимать значения из $[0, 1)$.

Критерии оценки.

1) Правильно найдены все значения x, при которых исходное уравнение имеет решения относительно параметра a — 3 балла.
2) Верно найдено множество значений параметра a — 7 баллов.

11 класс

1. Однажды утром из дворца вышел великан. Одновременно навстречу ему из пещеры выбежал гном. Известно, что до момента встречи великан успел пройти треть пути между дворцом и пещерой, однако, если бы великан вышел на час раньше, то он успел бы пройти до встречи половину пути. Через сколько минут после выхода великана гном и великан встретились?

   Ответ: через 80 минут.

   Решение. Из первого условия видно, что скорость гнома в два раза больше, чем скорость великана. Рассмотрим теперь второе условие. Если великан прошёл какое-то расстояние до момента движения гнома, то с момента, как гном побежит, до встречи великан пройдёт треть оставшегося пути. Тогда получаем, что середина всего пути — это треть оставшегося, то есть великан за час прошёл одну четверть всего пути. Значит, великан и гном вместе проходят 3/4 пути за час, а значит, всего им понадобится 4/3 часа или 80 минут, чтобы встретиться.

   Критерии оценки.

   1) Если неверное решение или ответ 120 мин — 0 баллов.
   2) Только верный ответ — 0 баллов.
   3) Верно составлены уравнения или проведены рассуждения, но допущена вычислительная ошибка — 4 балла.
   4) Если верное решение — 7 баллов.

2. В ящике лежат чёрные и белые шары. Вероятность достать из этого ящика чёрный шар равна 0,2. Если добавить в этот ящик 12 чёрных шаров, то вероятность достать чёрный шар изменится и будет равна 0,25. Сколько всего шаров находится в ящике?

   Ответ: 180 шаров.

   Решение. Пусть первоначально в ящике x чёрных шаров, а всего в ящике y шаров. Тогда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{x+12}{y+12} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} y = 5x, \\ y + 12 = 4x + 48 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 36, \\ y = 180. \end{cases}$$

Критерии оценки.

1) Если неверное решение — 0 баллов.
2) Только верный ответ — 0 баллов.
3) Если правильно получена система уравнений — 3 балла.
4) Если допущена вычислительная ошибка — 5 баллов.
5) Если верное решение — 7 баллов.

3. Даны натуральные числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2022}, a_{2023}$. Известно, что $a_1 > a_0$, $a_2 = 4a_1 - 3a_0$, $a_3 = 4a_2 - 3a_1$, …, $a_{2023} = 4a_{2022} - 3a_{2021}$. Докажите, что $a_{2023} > 3^{2022}$.

Решение. Из определения последовательности следует, что

$$a_2 - a_1 = 3(a_1 - a_0), \quad a_3 - a_2 = 3(a_2 - a_1) = 9(a_1 - a_0), \ldots,$$
$$a_{i+1} - a_i = 3(a_i - a_{i-1}) = 3^i(a_1 - a_0).$$

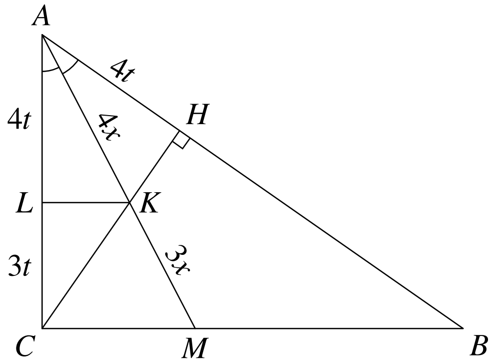
Поскольку $a_1 > a_0$, то $a_{2023} - a_{2022} = 3^{2022}(a_1 - a_0) \geqslant 3^{2022}$. Отсюда получаем то, что требовалось доказать.

Критерии оценки.

1) За ответ — 1 балл.
2) За то, что заметили, что появляется рекурсия с разностью членов, но без полного обоснования нужной оценки, не более 3-х баллов.
3) За правильное решение и полное обоснование нужной оценки — 7 баллов.

4. В треугольнике ABC угол C прямой. Высота CH этого треугольника пересекает биссектрису AM в точке K. Найдите AC, если $AB = 20$, а $AK : KM = 4 : 3$.

   Ответ: $\frac{80}{7}$.



   Решение. Проводим $KL \parallel CM$, где точка L лежит на катете AC (см. рис.) Получаем равные прямоугольные треугольники ALK и AHK (по гипотенузе и острому углу). Отсюда $AL = AH$. Так как $AK : KM = 4 : 3$ (по условию), то по теореме о пропорциональных отрезках получаем, что $AL : LC = 4 : 3$. Отсюда, как уже было отмечено выше, $AL = AH = 4t$, а $LC = 3t$. Поэтому находим из прямоугольного треугольника ACH, что $\cos\angle CAH = \frac{4}{7}$. Отсюда $AC = AB\cos\angle A = \frac{80}{7}$.

Критерии оценки.

1) За правильный ответ — 1 балл.
2) За использование теоремы Фалеса, при проведении $LK \parallel BC$, если замечается, что $AL : LC = AK : KM = \frac{4}{3}$. Можно дать 1 балл.
3) Если найдено, что $AH : AC = 4 : 7$, но решение не закончено, то 3 балла.

5. У Незнайки есть несколько карточек, на каждой из которых написано по одному положительному числу. Среди всех чисел на карточках не менее пяти различных. Оказалось, что для любых двух карточек

можно указать две другие карточки, произведение чисел на которых такое же, как на первых двух. Какое наименьшее количество карточек может быть у Незнайки?

Ответ: 13.

Решение. Оценка. Карточки с самым большим и вторым по величине числами должны быть хотя бы в двух экземплярах каждая — иначе произведение этих чисел нельзя будет получить вторым способом. Но тогда карточек с самым большим числом должно быть минимум 4, иначе квадрат самого большого числа нельзя будет получить вторым способом. То же верно и для двух самых маленьких чисел. Поскольку различных чисел не меньше пяти, это уже даёт 12 карточек. Ещё одна нужна для пятого числа.

Пример. 1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 8, 8, 16, 16, 16, 16.

Критерии оценки.

1) Если неверное решение — 0 баллов.
2) Только верный ответ — 0 баллов.
3) Если есть только верный пример — 3 балла.
4) Если есть только верная оценка — 4 балла.
5) Если верное решение — 7 баллов.