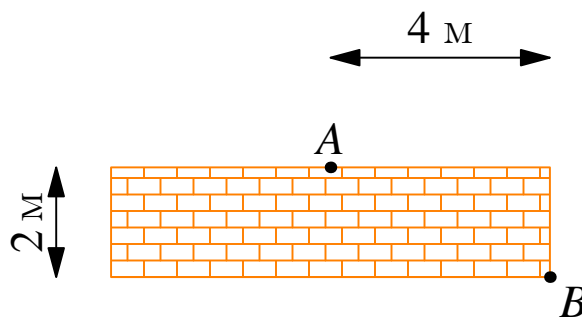


7 КЛАСС

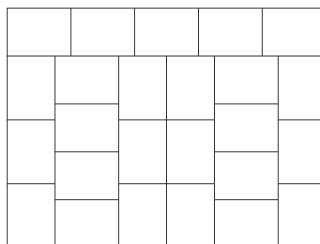
1. Представьте число 2021 при помощи одиннадцати двоек и арифметических операций. Использовать возведение в степень и скобки нельзя.
2. Около бетонной стены вкопаны два колышка: A и B (см. рисунок). Ширина стены равна 2 метра, а её длина — 8 метров. К колышку A веревкой длиной 5 метров привязана собака Жучка. К колышку B двухметровой веревкой привязан пёс Мухтар, который решил закопать косточку так, чтобы Жучка не смогла её выкопать. Перепрыгнуть стену собаки не могут. Под стеной косточки Мухтар не закапывает. Нарисуйте участок, где могла быть закопана косточка. Опишите, как выглядит граница этой области (из каких частей состоит). Ответ обоснуйте.



3. Летом Дима решил купить аквариум с рыбками, но отложил покупку до осени. Осенью он обнаружил, что аквариум подорожал на 60%, а рыбки подешевели на 60%. При этом, аквариум и рыбки стали стоять одинаково. Как изменилась цена аквариума с рыбками, относительно своей цены летом?
4. Можно ли расставить в клетки таблицы 6×6 натуральные числа от 1 до 36 так, чтобы суммы чисел в любом квадрате 2×2 были одинаковы? Каждое число должно быть записано в таблицу ровно один раз и в каждой клетке должно располагаться ровно одно число.
5. В прямоугольнике размерами 6×9 в одном углу вырезали квадрат размером 3×3 . Можно ли получившуюся фигуру разрезать на три части так, чтобы из них можно было сложить квадрат?
6. Отличник Роман выписал на доске числа $1, 2, 3, \dots, 2021$ и сказал, что знает на сколько нулей заканчивается их произведение. Тане это не нравится, поэтому она решила стереть несколько чисел так, чтобы произведение оставшихся оканчивалось не более, чем на один 0. Какое наименьшее количество чисел ей придётся стереть?

8 КЛАСС

1. Летом Дима решил купить аквариум с рыбками, но отложил покупку до осени. Осенью он обнаружил, что аквариум подорожал на 60%, а рыбки подешевели на 60%. При этом, аквариум и рыбки стали стоять одинаково. Как изменилась цена аквариума с рыбками, относительно своей цены летом?
2. Большой прямоугольник состоит из 25 одинаковых маленьких прямоугольников (см. рисунок). Периметр большого прямоугольника равен 35. Найдите периметр маленького прямоугольника.



3. Найдите два наименьших последовательных натуральных числа, у каждого из которых сумма цифр делится на 7.
4. В комнате лежит ящик, заполненный ягодами черешни. В комнату по очереди заходят 2021 человек, из которых часть составляют рыцари, а остальные лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Первый из вошедших в комнату открыл ящик, пересчитал ягоды и сказал: «В ящике больше одной ягоды». После этого он взял из ящика одну ягоду и вышел из комнаты. Потом зашёл второй и, пересчитав ягоды, сказал: «В ящике больше двух ягод». Затем он тоже взял одну ягоду из ящика и вышел из комнаты. Также и остальные из оставшихся по очереди заходили в комнату, говорили, что в ящике осталось больше 3, 4, ..., 2021 ягод, брали по одной ягоде из ящика и выходили из комнаты. Какое наибольшее число лжецов может быть среди этих 2021-го человека?
5. В пятиугольнике $ABCDE$ угол C равен 60° , а остальные четыре угла равны между собой. Известно, что $AB = 5$, $BC = 7$, $CD = 10$. Найдите длины сторон AE и DE .
6. На окружности отметили n точек и раскрасили их в два цвета. Затем все точки попарно соединили отрезками, посчитали количество отрезков, соединяющих точки разных цветов, и количество отрезков, соединяющих точки одного цвета. Оказалось, что их поровну. При каких n это возможно?

9 КЛАСС

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 = 256y^4, \\ (y - 1)^2 = 4. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

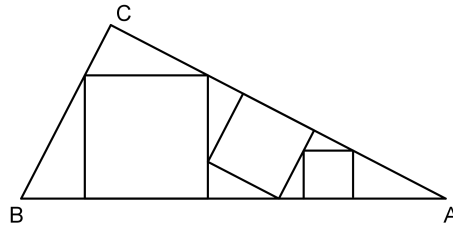
$$\underbrace{\{\dots \{x + \{x + \{x\}\}\} \dots\}}_{2021} = [x].$$

Здесь $[x]$ — целая часть числа x , $\{x\}$ — дробная часть x . (Целой частью действительного числа x называется наибольшее целое число, которое меньше или равно x . Дробной частью x называется разность $x - [x]$.)

3. Секция лёгкой атлетики построилась в ряд на стадионе. Рядом с каждым спортсменом стоит корзина с мячами. Каждый, кто стоял перед Таней бросил мяч каждому, кто стоял позади неё. Таня подсчитала, что всего было сделано 80 бросков. Потом ребята перестроились и снова каждый спортсмен, стоявший в ряду перед Таней бросил мяч каждому, кто стоял позади неё. На этот раз оказалось выполнено 90 бросков. Сколько ребят ходят в секцию?
4. В треугольнике ABC проведены высота BK и медиана BM . Точки K и M не совпадают и лежат между вершинами A и C . Известно, что углы ABK и MBC равны. Чему равен угол B ?
5. На доске написано 2021 различное число. Миша любит перемножать числа и решил подчеркнуть те, которые равны произведению остальных 2020 чисел. Какое количество чисел он мог подчеркнуть?
6. На окружности отметили n точек и раскрасили их в два цвета. Затем все точки попарно соединили отрезками, посчитали количество отрезков, соединяющих точки разных цветов, и количество отрезков, соединяющих точки одного цвета. Оказалось, что их поровну. При каких n это возможно?

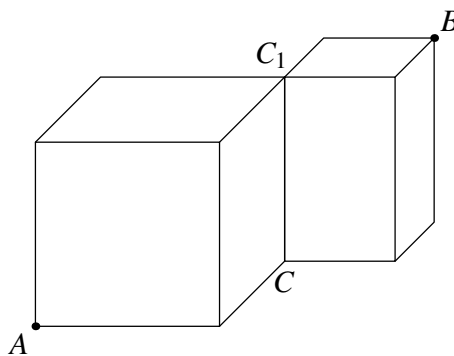
10 КЛАСС

1. Докажите, что любая возрастающая арифметическая прогрессия, которая содержит числа 189, 221, 245, содержит также число 2021.
2. На сколько областей делят координатную плоскость три линии: ось Ox и две параболы $y = x^2 - 1$, $x = y^2 - 1$?
3. Решите уравнение $f(g(x)) = g(f(x))$, где $f(x) = |g(x)|$ и $g(x) = 1 - 2|x|$.
4. В прямоугольный треугольник ABC поместили квадрат так, что одна его сторона лежит на гипотенузе, а другие две вершины расположены на катетах треугольника. Подобное построение выполнили ещё два раза (см. рисунок):



Найдите сторону большого квадрата, если сторона самого маленького квадрата равна $\frac{1}{2}$, а катет BC равен 4.

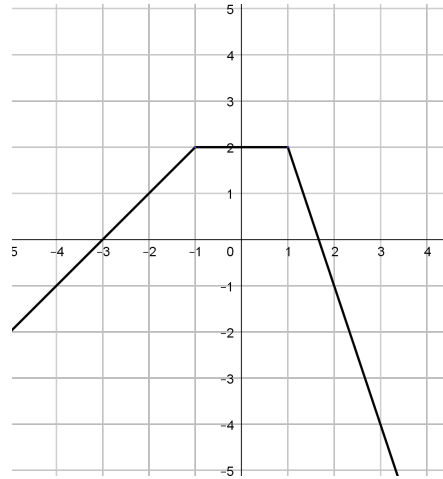
5. Найдите длину кратчайшего пути из точки A в точку B по поверхности, образованной кубом и правильной четырёхугольной призмой с общим ребром CC_1 (см. рисунок). Ребро куба и высота призмы равны 5, сторона основания призмы равна 3. Грани куба и призмы, смежные ребру CC_1 лежат в двух перпендикулярных плоскостях.



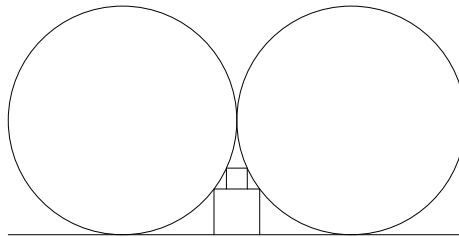
6. Отличник Роман выписал на доске 2021 различное целое число. Таня возвела каждое число либо в квадрат, либо в куб и записала полученный 2021 результат в тетрадь. Какое наименьшее количество различных чисел могло оказаться в тетради?

11 КЛАСС

1. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Постройте график функции $y = xf(x)$. Объясните построение.



2. Существует ли такой многочлен с действительными коэффициентами $f(x)$, для которого выполняется равенство $f(f(x)) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 2$ для всех действительных значений переменной x ?
3. Между двумя касающимися окружностями радиуса 1 и их общей внешней касательной вписаны два квадрата так, что сторона большего квадрата лежит на касательной, а сторона меньшего квадрата лежит на стороне большего. При этом на каждой из окружностей лежит по одной вершине каждого квадрата (см. рисунок). Найдите сторону меньшего квадрата.



4. Секция лёгкой атлетики построилась в ряд на стадионе. Рядом с каждым спортсменом стоит корзина с мячами. Каждый, кто стоял перед Сашей бросил мяч каждому, кто стоял позади него. Саша подсчитал, что всего было сделано 80 бросков. Потом ребята перестроились и снова каждый спортсмен, стоявший в ряду перед Сашей бросил мяч каждому, кто стоял позади него. На этот раз оказалось выполнено 90 бросков. Сколько ребят ходят в секцию?
5. Докажите, что для любых трёх отрезков одинаковой длины в пространстве можно подобрать плоскость таким образом, чтобы проекции отрезков на эту плоскость были равны.
6. Отличник Роман выписал на доске 2021 различное целое число. Аня возвела каждое число либо в квадрат, либо в куб и записала полученный 2021 результат в тетрадь. Какое наименьшее количество различных чисел могло оказаться в тетради?