

ТУР II. ЗАДАЧИ

РЕШЕНИЯ

Решение задач необходимо писать разборчиво. Ход решения должен быть кратко прокомментирован и обоснован, в каждой задаче четко выделен ответ.

Максимальное количество баллов – 90

Время решения задач - 140 минут

(6 задач, 90 баллов)

Задача 1 (15 баллов).

У начинающего инвестора Артема есть в распоряжении 1000 рублей. Сейчас он стоит перед выбором между двумя типами ценных бумаг. Бумага типа А стоит 600 рублей и через год будет стоить в $(1+r)$ раз дороже, где r — ставка доходности. Бумага типа В стоит 810 рублей и через 2 года будет стоить в $(1+r)^2$ раз дороже. Более того, Артем получит бонус за терпение в размере x рублей к концу второго года, если купит бумагу типа В. Определите, при каком значении x Артему безразлично, какие бумаги покупать, если он хочет иметь на руках как можно больше денег через 2 года, ставка доходности $r = 1/3$, а покупать можно только целое количество ценных бумаг.

Решение:

Если Артем выберет ценные бумаги типа А, то в первом году ему хватит денег только на одну бумагу. К началу второго года у него будет 1200. На эти деньги он купит еще 2 бумаги и к концу второго года получит 1600 рублей.

(5 баллов)

Если Артем выберет ценные бумаги типа В, то спустя 2 года у него будет

$$810 \cdot (1 + 1/3)^2 + x = 1440 + x \text{ рублей.}$$

Приравняем доходность, получим $x = 160$.

(10 баллов)

Ответ: $x = 160$.

Примечание к проверке решения задачи 1:

Возможна несколько отличная от авторской интерпретация условия «хочет иметь на руках как можно больше денег через 2 года» некоторыми участниками олимпиады:

При приобретении бумаги В сумма денег через 2 года составит 1440 руб. Так как при покупке бумаги за 810 руб. у Артема осталось бы 190 руб., то сумма средств, которой он располагал бы в конце второго года, составит 1630. В таком случае положительное значение премии x невозможно.

Подобное решение можно засчитывать как верное, т.к. оно не противоречит формулировке вопроса задачи.

Задача 2 (15 баллов).

В городе N, как и везде, спрос на мороженое возрастает с ростом температуры воздуха. Поэтому функция спроса на мороженое (в день) имеет следующий вид:

$$P_d = 4500t - aQ,$$

где t – температура воздуха в градусах по Цельсию,
 a – неизвестный коэффициент.

С ростом температуры воздуха возрастают затраты на перевозку и хранение мороженого, поэтому, как ни странно, с наступлением жары предложение мороженого в городе N сокращается. Функция предложения мороженого выглядит следующим образом:

$$P_s = bQ + 5t^3,$$

где t – температура воздуха,
 b – неизвестный коэффициент.

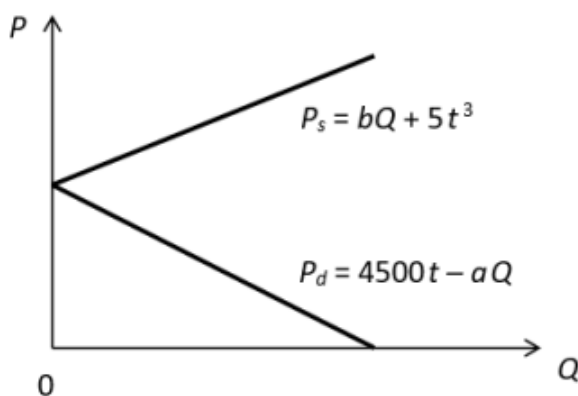
В некоторые дни температура воздуха достигает такого значения, при котором в городе вообще прекращается продажа мороженого.

1) Сделайте графическую иллюстрацию описанной ситуации в системе координат $(P; Q)$.

2) Определите это значение температуры t (*Внимание:* ответ должен быть численным; он не может выражаться через a и b).

Решение:

1) Для каждого данного значения t функции спроса и предложения являются линейными. Очевидно, равновесный объем на рынке станет нулевым, когда графики функций спроса и предложения, перемещаясь по мере повышения температуры, примут следующее взаимное положение:



(5 баллов)

$$2) \text{ При } Q = 0 \quad P_s = 5t^3, \quad P_d = 4500t.$$

$$P_d = P_s \quad \Rightarrow \quad 4500t = 5t^3 \Rightarrow t = 30.$$

(10 баллов)

Ответ: $t = 30$.

Задача 3 (15 баллов).

Известно, что для выпуска единицы продукта X необходимо 6 единиц фактора А и 2 единицы фактора В. Единица фактора А стоит 5 рублей, а единица фактора В стоит 20 рублей. Ресурсы могут использоваться только в заданной фиксированной пропорции так, что для увеличения выпуска в n раз необходимо увеличить использование каждого ресурса также в n раз. Никаких других ресурсов фирма не использует. Спрос на ее продукцию имеет вид: $Q_d = 600 - 2P$. Найти оптимальный выпуск фирмы и величину максимальной прибыли.

Решение:

Оптимальным, с точки зрения экономической теории, является выпуск продукции, максимизирующий прибыль.

$$\pi = TR - TC,$$

где $TR = P \times Q$

$$TR = (300 - 0,5Q) \times Q = 300Q - 0,5Q^2$$

$$TC = (6 \times 5 + 2 \times 20) \times Q = 70Q. \quad (5 \text{ баллов})$$

Таким образом, функция прибыли имеет вид:

$$\pi = 300Q - 0,5Q^2 - 70Q = 230Q - 0,5Q^2 \quad (3 \text{ балла})$$

График функции – парабола ветвями вниз с вершиной в максимуме.

(2 балла)

Максимум данной функции достигается, если её производная равна нулю: $(\pi)' = 0$. данное условие выполняется при объеме производства равном 230 ($Q = 230$) (может быть определено без использования инструмента производной функции).

Максимальная прибыль будет равна:

$$\pi = 230 \times 230 - 0,5 \times 230^2 = 0,5 \times 230^2 = 0,5 \times 52\,900 = 26\,450.$$

(5 баллов)

Ответ: $Q_{opt.} = 230$, максимальная прибыль равна 26 450 рублей.

Задача 4 (15 баллов).

Однажды для медведя Потапа наступили тяжелые времена: ему пришлось устроиться на работу, чтобы собственным трудом зарабатывать себе на мед. За один час работы Потап получает 2 руб. При этом он сам может решать, сколько часов в сутки потратить на работу. Все остальное время суток (даже во сне) Потап ест. За каждый час свободного времени он съедает 1 килограмм меда. Определите аналитический вид функции спроса Потапа на мед в виде: $Q_d = f(P)$, где Q_d – количество меда в сутки, в кг; P – цена одного килограмма меда, в руб.

Решение:

Очевидно, что количество часов свободного времени для Потапа в сутки равно Q . Тогда число часов работы составляет $(24 - Q)$.

За сутки заработок Потапа: $2 \times (24 - Q)$.

Расходы на мед в сутки: $P \times Q$ (руб.) (5 баллов)

Можно составить уравнение: $2 \times (24 - Q) = P \times Q \Rightarrow Q_d = \frac{48}{P + 2}$. (10 баллов)

Ответ: $Q_d = \frac{48}{P + 2}$.

Задача 5 (15 баллов).

В стране А уровень безработицы в 2019 г. был составлял 20%. В 2020 г. численность занятых выросла на 5%, а уровень безработицы оказался равным 16%. Определите, на сколько процентов и в какую сторону изменилась в 2020 г. по сравнению с 2019 г. численность безработных.

Решение: Пусть x - изменение численности безработных в 2020 г. по сравнению с 2019 г.

Уровень безработицы рассчитывается по формуле:

$$u = \frac{U}{E + U} \cdot 100\%$$

Тогда исходные данные задачи позволяют записать для 2019 г.:

$$20 = \frac{U}{E + U} \cdot 100\% \quad (1)$$

а для 2020 г.:

$$16 = \frac{xU}{1,05E + xU} \cdot 100\% \quad (2) \quad (5 \text{ баллов})$$

Из равенства (1) после преобразований получаем:

$$\frac{E}{U} = 4 \quad (3)$$

Преобразуя равенство (2), имеем: $\frac{100}{16} = \frac{1,05E}{xU} + 1$ (5 баллов)

что с учетом (3) преобразуется к виду: $\frac{84}{16} = \frac{1,05 \cdot 4}{x}$

$$x = \frac{4,2 \cdot 16}{84} = 0,8$$

Следовательно, численность безработных сократилась на:

$$1 - 0,8 = 0,2 \text{ (или на 20\%)} \quad (5 \text{ баллов})$$

Ответ: численность безработных сократилась на 20%

Задача 6 (15 баллов).

Спрос на продукцию фирмы-монополиста характеризуется функцией $Q_d = a - bP$ (где Q_d – величина спроса, тонн, P – цена одной тонны, тыс. рублей, a, b – параметры, $a > 0, b > 0$). Общие издержки производства фирмы имеют вид $TC(Q) = cQ + d$ (Q – объем производства, тонн, c, d – параметры, $c > 0, d > 0$).

Известно, что выручка и прибыль фирмы-монополиста максимальны при ценах 200 и 250 тыс. рублей за тонну продукции, соответственно. Определите значение средних переменных издержек фирмы-монополиста.

Решение:

Выручка фирмы максимальна в точке единичной эластичности, т.е. при $Q_d = 0, P=400$. Найдем коэффициент a из функции спроса $Q_d = a - bP$.

$$0 = a - b400 \quad a = 400b$$

В точке максимума выручки $Q = 400b - bP = 400b - 200b = 200b$ **(5 баллов)**

Найдем MR в точке равновесия фирмы-монополиста ($MR = MC$).

$$P = \frac{a}{b} - \frac{Q}{b} \quad \text{Тогда} \quad MR = \frac{a}{b} - \frac{2Q}{b}$$

В точке максимума прибыли $P = 250 \Rightarrow Q = 400b - 250b = 150b$

$$MR(Q = 150b) = \frac{400b}{b} - \frac{2 \cdot 150b}{b} = 100 = MC. \quad \textbf{(5 баллов)}$$

$$TC(Q) = cQ + d$$

$$AVC = \frac{VC}{Q} = \frac{cQ}{Q} = c = MC$$

Следовательно, $AVC = 100$ тыс.руб. **(5 баллов)**

Ответ: $AVC = 100$ тыс. руб.