Решения задач муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике

2021–2022 учебный год

Ижевск, 2021

7 класс

1. Представьте число 2021 при помощи одиннадцати двоек и арифметических операций. Использовать возведение в степень и скобки нельзя.

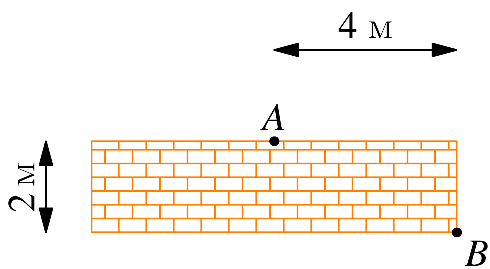
   Ответ: $2222 - 222 + 22 - 2 : 2$.

   Критерии оценки.

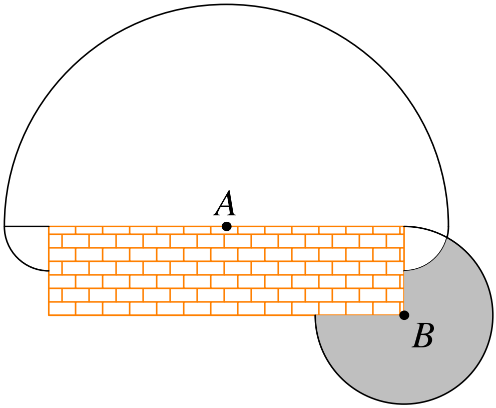
   1) Приведён правильный ответ — 7 баллов.

   2) Приведён ответ с использованием скобок или степени — 0 баллов.

2. Около бетонной стены вкопаны два колышка: A и B (см. рисунок). Ширина стены равна 2 метра, а её длина — 8 метров. К колышку A веревкой длиной 5 метров привязана собака Жучка. К колышку B двухметровой веревкой привязан пёс Мухтар, который решил закопать косточку так, чтобы Жучка не смогла её выкопать. Перепрыгнуть стену собаки не могут. Под стеной косточки Мухтар не закапывает. Нарисуйте участок, где могла быть закопана косточка. Опишите, как выглядит граница этой области (из каких частей состоит). Ответ обоснуйте.



   Ответ: Два отрезка и две дуги окружностей радиусами 1 и 2 метра.



Решение. Участок земли, доступный Жучке, состоит из половины круга радиусом 5 метров с центром в точке A и двух четвертей круга радиусом 1 метр с центрами в углах стены (см. рисунок). Мухтару же доступен участок в виде круга радиусом 2 метра без одной четверти. Чтобы Жучка не смогла достать до закопанной косточки, из участка доступного Мухтару необходимо удалить его пересечение с доступным Жучке участком.

Критерии оценки.

Для полного решения необходимо, чтобы было видно, что решением служит часть круга, из которого вырезали часть дугой и двумя отрезками. Вычислять точные значения не обязательно. Граница закрашенной области может входить или не входить во множество решений.

1) Только правильная картинка — 1 балл.

3. Летом Дима решил купить аквариум с рыбками, но отложил покупку до осени. Осенью он обнаружил, что аквариум подорожал на 60%, а рыбки подешевели на 60%. При этом, аквариум и рыбки стали стоить одинаково. Как изменилась цена аквариума с рыбками, относительно своей цены летом?

Ответ: Аквариум с рыбками подешевел *на* 36%, или: аквариум с рыбками подешевел *в* 1,5625 раза.

Решение. Пусть x и y — летние цены на аквариум и рыбок соответственно. Тогда по условию задачи $1{,}6x = 0{,}4y$, то есть $y = 4x$. Отсюда находим, что летом стоимость аквариума с рыбками составляла $x + y = 5x$. Осенью стоимость покупки равна $1{,}6x + 0{,}4y = 3{,}2x$. Значит стоимость покупки уменьшилась на $\frac{5x-3{,}2x}{5x} \cdot 100\% = 36\%$. Иначе, стоимость покупки уменьшилась в $\frac{5x}{3{,}2x} = 1{,}5625$ раза.

Критерии оценки.

Ответ задачи может быть сформулирован любым из представленных способов: в процентах или в относительных единицах. За ответ, представленный только одним способом, баллы не снимаются.

1) Если в решении приведены оба ответа, но один из них указан неверно — 5 баллов.

2) Приведён ответ без решения — 0 баллов.

4. Можно ли расставить в клетки таблицы 6×6 натуральные числа от 1 до 36 так, чтобы суммы чисел в любом квадрате 2×2 были одинаковы? Каждое число должно быть записано в таблицу ровно один раз и в каждой клетке должно располагаться ровно одно число.

   Ответ: Да, можно.

   Решение. Приведём одну из возможных расстановок чисел в таблице:

34	6	28	12	22	18
3	31	9	25	15	19
35	5	29	11	23	17
2	32	8	26	14	20
36	4	30	10	24	16
1	33	7	27	13	21

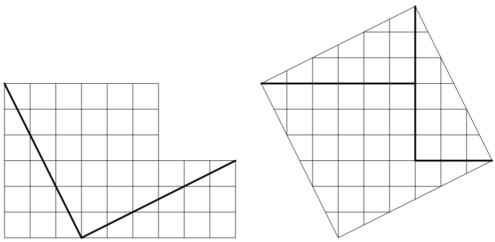
Критерии оценки.

1) Любые попытки доказать невозможность расстановки чисел в таблице, удовлетворяющей условию задачи — 0 баллов.
2) Приведён пример таблицы не удовлетворяющий условию задачи — 0 баллов.
3) Верный ответ без примера — 0 баллов.

5. В прямоугольнике размерами 6×9 в одном углу вырезали квадрат размером 3×3. Можно ли получившуюся фигуру разрезать на три части так, чтобы из них можно было сложить квадрат?

Ответ: Да, можно.

Решение. Пример разрезания и полученный квадрат:



Критерии оценки.

В решении задачи требуется только предъявить рисунок, указывающий способ разрезания фигуры на три части, и рисунок, на котором из полученных частей составлен квадрат. Доказательство факта, что полученная фигура действительно является квадратом, от учащегося *не требуется*.

1) Любые попытки доказать невозможность разрезания фигуры, удовлетворяющей условию задачи — 0 баллов.
2) Приведён пример правильного разрезания фигуры, но построение квадрата отсутствует — 4 балла.
3) Приведён пример разрезания, из которого невозможно сложить квадрат — 0 баллов.

4) Верный ответ без примера разрезания — 0 баллов.

6. Отличник Роман выписал на доске числа $1, 2, 3, \ldots, 2021$ и сказал, что знает на сколько нулей заканчивается их произведение. Тане это не нравится, поэтому она решила стереть несколько чисел так, чтобы произведение оставшихся оканчивалось не более, чем на один 0. Какое наименьшее количество чисел ей придётся стереть?

Ответ: 403.

Решение. Заметим, что среди выписанных на доске чисел ровно 1010 кратных 2 и 404 чисел кратных 5. Также заметим, что произведение чисел оканчивается не более, чем на один нуль если это произведение не кратно 100.

Приведём пример на 403 стёртых числа. Если стереть все числа, кратные 5, кроме пятёрки $(10, 15, \ldots, 2020)$, то произведение оставшихся чисел не будет кратно 25, поэтому не может заканчиваться на два 0.

Оценка. Предположим, что стёрли меньше 403 чисел. Тогда из 404 чисел, кратных 5, осталось не меньше двух, и произведение оставшихся чисел, кратно 25. Так как из 1010 чётных чисел стёрли не более 402, то произведение оставшихся чисел, кратно 4. Получаем, что произведение оставшихся чисел кратно 100 и заканчивается не менее, чем на два 0. Значит, необходимо стереть не менее 403 чисел.

Критерии оценки.

1) Если не обосновано, сколько чисел кратно 2 и 5, баллы не снимать.

2) Пример на 403 числа без оценки — 2 балла.

3) Оценка без примера — 3 балла.

8 класс

1. Летом Дима решил купить аквариум с рыбками, но отложил покупку до осени. Осенью он обнаружил, что аквариум подорожал на 60%, а рыбки подешевели на 60%. При этом, аквариум и рыбки стали стоить одинаково. Как изменилась цена аквариума с рыбками, относительно своей цены летом?

   Ответ: Аквариум с рыбками подешевел *на* 36%, или: аквариум с рыбками подешевел *в* 1,5625 раза.

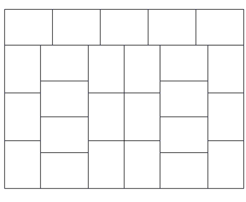
   Решение. Пусть x и y — летние цены на аквариум и рыбок соответственно. Тогда по условию задачи $1{,}6x = 0{,}4y$, то есть $y = 4x$. Отсюда находим, что летом стоимость аквариума с рыбками составляла $x + y = 5x$. Осенью стоимость покупки равна $1{,}6x + 0{,}4y = 3{,}2x$. Значит стоимость покупки уменьшилась на $\frac{5x-3{,}2x}{5x} \cdot 100\% = 36\%$. Иначе, стоимость покупки уменьшилась в $\frac{5x}{3{,}2x} = 1{,}5625$ раза.

   Критерии оценки.

   Ответ задачи может быть сформулирован любым из представленных способов: в процентах или в относительных единицах. За ответ, представленный только одним способом, баллы не снимаются.

   1) Если в решении получены оба ответа, но один из них неверный — 5 баллов.
   2) Приведён ответ без решения — 0 баллов.

2. Большой прямоугольник состоит из 25 одинаковых маленьких прямоугольников (см. рисунок). Периметр большого прямоугольника равен 35. Найдите периметр маленького прямоугольника.



Ответ: 7.

Решение. Пусть бóльшая сторона маленького прямоугольника равна x, мéньшая — y. Тогда $5x = 2x + 4y$ и $13x + 6y = 35$. Из первого уравнения получаем, что $3x = 4y$, подставим во второе: $10x + 10y = 35$. Тогда $2x + 2y = 7$.

Критерии оценки.

1) Неправильно составлено хотя бы одно уравнение — 0 баллов.
2) Верно составлены оба уравнения, но решение системы неверно или не завершено — 3 балла.
3) Нашли x и y, но периметр нашли неверно — 5 баллов.

3. Найдите два наименьших последовательных натуральных числа, у каждого из которых сумма цифр делится на 7.

Ответ: 69999 и 70000.

Решение. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр натурального числа n. Докажем, что разность между суммами цифр двух последовательных натуральных чисел имеет вид $-1+9t$, где t — неотрицательное число. Заметим, что если последняя цифра натурального числа n не равна 9, тогда $S(n) - S(n+1) = -1$. Если же t последних цифр натурального числа n равны 9, то при переходе к следующему за ним числу они все обращаются в 0, а первая (с конца) цифра, не равная 9, увеличится на 1. Значит, разность цифр $S(n) - S(n+1) = 9t - 1$. А это и требовалось показать.

Вернёмся к решению задачи. По доказанному выше разность сумм цифр между двумя последовательными числами $S(n) - S(n+1) = -1+9t$ должна делиться на 7. Чтобы число n оказалось наименьшим, нужно уменьшить в нём число разрядов. Наименьшее возможное значение $t = 4$, то есть число n должно оканчиваться четырьмя девятками. Первой цифрой, которая делится на 7, является цифра 7. Значит, число $n + 1 = 70000$ и $n = 69999$.

Критерии оценки.

1) Приведён ответ без оценок — 2 балла.
2) Полное обоснованное решение — 7 баллов.

4. В комнате лежит ящик, заполненный ягодами черешни. В комнату по очереди заходят 2021 человек, из которых часть составляют рыцари, а остальные лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Первый из вошедших в комнату открыл ящик, пересчитал ягоды и сказал: «В ящике больше одной ягоды». После этого он взял из ящика одну ягоду и вышел из комнаты. Потом зашёл второй и, пересчитав ягоды, сказал: «В ящике больше двух ягод». Затем он тоже взял одну ягоду из ящика и вышел из комнаты. Также и остальные из оставшихся по очереди заходили в комнату, говорили, что в ящике осталось больше $3, 4, \ldots, 2021$ ягод, брали по одной ягоде из ящика и выходили из комнаты. Какое наибольшее число лжецов может быть среди этих 2021-го человека?

   Ответ: 1011.

   Решение. Пусть в ящике первоначально было n ягод. Если в комнату входит человек с порядковым номером $k = 1, 2, \ldots, 2021$, то в этот момент в ящике находится $n-k+1$ ягод. Если входящий с порядковым номером k является лжецом, то сказанное им утверждение: $n-k+1 > k$ является ложным, то есть выполняется неравенство

$$n - k + 1 \leqslant k \Longleftrightarrow k \geqslant \frac{n+1}{2}.$$

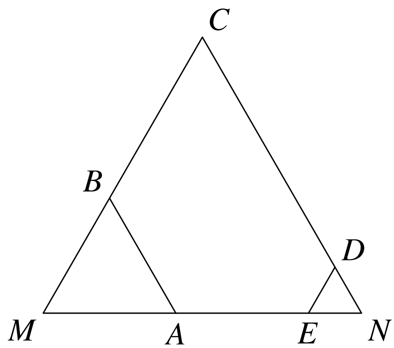
   Чтобы число лжецов оказалось наибольшим, последнее неравенство должно иметь наибольшее число решений относительно переменной k. Значит число n должно быть наименьшим. Так как каждый из входящих вынимал из ящика одну ягоду, значит изначально количество ягод не может быть менее 2021. Таким образом, $k \geqslant \frac{2021+1}{2} = 1011$, то есть лжецами являются входящие с порядковыми номерами $1011, 1012, \ldots, 2021$, всего 1011 человек.

Критерии оценки.

1) Приведён только ответ — 1 балл.
2) Если в решении нет утверждения типа, «так как каждый из выходящих брал по одной ягоде, то в ящике изначально не меньше 2021 ягод», то общее решение оценивается не больше 3 баллов.
3) Полное обоснованное решение — 7 баллов.

5. В пятиугольнике $ABCDE$ угол C равен 60°, а остальные четыре угла равны между собой. Известно, что $AB = 5$, $BC = 7$, $CD = 10$. Найдите длины сторон AE и DE.

Ответ: $AE = 5$, $DE = 2$.



Решение. Сумма углов пятиугольника равна $180° \cdot (5 - 2) = 540°$. Поэтому

$$\angle A = \angle B = \angle D = \angle E = \frac{540° - 60°}{4} = 120°.$$

Продолжим стороны BC, CD пятиугольника до их пересечения с прямой AE, обозначим $M = BC \cap AE$, $N = CD \cap AE$. Угол MAB является смежным углу A пятиугольника, а угол ABM является смежным углу B пятиугольника, поэтому $\angle MAB = \angle ABM = 180° - 120° = 60°$. Значит треугольник ABM является равносторонним, то есть

$\angle M = 60°$. Аналогично доказывается, что $\triangle EDN$ является равносторонним. Тогда большой треугольник MCN тоже является равносторонним. Отсюда $MB = AB = 5$, $MC = MB + BC = 5 + 7 = 12$, следовательно $CN = MC = 12$, $DN = CN - CD = 12 - 10 = 2$, $DE = DN = 2$. А также $MN = MC = 12$, $AM = AB = 5$, $EN = ED = 2$ и $AE = MN - MA - EN = 12 - 5 - 2 = 5$.

Возможно также решение, при котором пятиугольник достраивается до параллелограмма.

Критерии оценки.

1) Вычислены остальные углы пятиугольника — 1 балл.
2) Выполнено дополнительное построение без обоснования, что построенный треугольник является равносторонним — не более 4 баллов.

6. На окружности отметили n точек и раскрасили их в два цвета. Затем все точки попарно соединили отрезками, посчитали количество отрезков, соединяющих точки разных цветов, и количество отрезков, соединяющих точки одного цвета. Оказалось, что их поровну. При каких n это возможно?

Ответ: $n = k^2$, где k — целое.

Решение. Пусть количество точек первого цвета равно p, количество точек второго цвета равно q. Тогда число отрезков, соединяющих точки разных цветов равно pq, количество отрезков, соединяющих точки первого цвета равно $\frac{p(p-1)}{2}$, а количество отрезков, соединяющих точки второго цвета равно $\frac{q(q-1)}{2}$. По условию задачи

$$pq = \frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} \Leftrightarrow p + q = (p-q)^2. \qquad (*)$$

Таким образом, если условие задачи выполняется, то общее число точек $n = p + q = k^2$, где $k = p - q$.

Обратно, пусть общее количество точек $n = k^2$, где k — целое неотрицательное число. Покажем, что точки можно покрасить в два цвета так, чтобы количество отрезков, соединяющих точки одного цвета равнялось количеству отрезков, соединяющих точки разных цветов. Из равенства $(*)$ получаем систему равенств $p - q = k$, $p + q = k^2$, из которой находим:

$$p = \frac{k(k+1)}{2} \text{ — целое число,} \quad q = \frac{k(k-1)}{2} \text{ — тоже целое.}$$

Это и есть требуемые количества точек первого и второго цвета, удовлетворяющие условию задачи.

Критерии оценки.

1) Рассмотрены только один или несколько частных случаев — 0 баллов.
2) Если доказано, что из условий задачи следует равенство $n = k^2$ для некоторого k, но не доказано, что это равенство также является достаточным, решение оценивается не более, чем в 3 балла.

9 класс

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 = 256y^4, \\ (y-1)^2 = 4. \end{cases}$$

Ответ: $(\pm 12; 3)$, $(\pm 4; -1)$.

Решение. Из второго уравнения системы получаем $y-1 = \pm 2$, то есть $y = 3$ или $y = -1$. Подставим эти значения в первое уравнение:

$$\begin{aligned} y = 3 &\Rightarrow x^4 = 256 \cdot 81 = (4 \cdot 3)^4 = 12^4 &&\Rightarrow x = \pm 12, \\ y = -1 &\Rightarrow x^4 = 256 = 4^4 &&\Rightarrow x = \pm 4. \end{aligned}$$

Критерии оценки.

1) При потере корней решение оценивается не более, чем в 1 балл.

2. Решите уравнение

$$\{\cdots\{x+\{x+\{x\}\underbrace{\}\}\cdots\}}_{2021} = [x].$$

Здесь $[x]$ — целая часть числа x, $\{x\}$ — дробная часть x. (*Целой частью действительного числа x называется наибольшее целое число, которое меньше или равно x. Дробной частью x называется разность $x - [x]$.*)

Ответ: $\frac{k}{2021}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 2020$.

Решение (первый способ). Левая часть уравнения принимает значения из множества $[0,\ 1)$, поэтому $[x] \in [0,\ 1)$. Целая часть числа принимает только целые значения, следовательно $[x] = 0$, тогда $x \in [0,\ 1)$. Таким образом, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \{\cdots\{x+\{x+\{x\}\}\}\cdots\} = 0, \\ 0 \leqslant x < 1. \end{cases}$$

Так как $\{x\} = x$, то $\{x + \{x\}\} = \{2x\} = \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ 2x - 1, & \frac{1}{2} \leqslant x < 1. \end{cases}$

Тогда $\{x + \{2x\}\} = \begin{cases} \{3x\}, & 0 \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ \{3x - 1\}, & \frac{1}{2} \leqslant x < 1. \end{cases}$

Заметим, что $\{3x\} = \{3x - 1\}$, поэтому $\{x + \{2x\}\} = \{3x\}$. Далее аналогично

$$\{x + \{3x\}\} = \begin{cases} \{4x\}, & 0 \leqslant x < \frac{1}{3}, \\ \{4x - 1\}, & \frac{1}{3} \leqslant x < \frac{2}{3}, \\ \{4x - 2\}, & \frac{2}{3} \leqslant x < 1. \end{cases}$$

Тогда $\{x+\{3x\}\} = \{4x\}$ для каждого $x \in [0,\ 1)$. Повторяя эти рассуждения, придём в конечном итоге к уравнению $\{2021x\} = 0$. Отсюда получаем, что $2021x = k$ — целое, значит $x = \frac{k}{2021}$, $k = 0, \ldots, 2020$.

Решение (второй способ). Заметим, что $\{x + \{y\}\} = \{x + y\}$. Действительно, если $x = k + \{x\}$, $y = m + \{y\}$, где $k = [x]$, $m = [y]$, то получим $\{k + \{x\} + \{y\}\} = \{k + m + \{x\} + \{y\}\}$. Поэтому выражение в левой части уравнения упрощается к виду

$$\{x + \cdots + \{x + \{x\}\} \cdots\} = \{2001x\}.$$

Дальше решение завершается как в первом способе.

Критерии оценки.

1) Найден только один корень — 0 баллов.
2) Если верно преобразовано несколько выражений вида $\{x\}$, $\{x + {} + \{x\}\}$, $\{x + \{x + \{x\}\}\}$, … и замечено, что $\{q + n\} = \{q\}$, где n — целое число — не более 2 баллов.

3. Секция лёгкой атлетики построилась в ряд на стадионе. Рядом с каждым спортсменом стоит корзина с мячами. Каждый, кто стоял перед

Таней бросил мяч каждому, кто стоял позади неё. Таня подсчитала, что всего было сделано 80 бросков. Потом ребята перестроились и снова каждый спортсмен, стоявший в ряду перед Таней бросил мяч каждому, кто стоял позади неё. На этот раз оказалось выполнено 90 бросков. Сколько ребят ходят в секцию?

Ответ: 22.

Решение. Заметим, что 80 равно произведению количества ребят, стоявших перед Таней и, стоявших после Тани в первом случае, а 90 — во втором. Число 80 можно представить в виде произведения двух целых чисел 5 способами: $1 \cdot 80$, $2 \cdot 40$, $4 \cdot 20$, $5 \cdot 16$, $8 \cdot 10$. Это означает, что в секции может быть 82, 43, 25, 22 или 19 ребят. Из второго условия, так как 90 можно представить в виде произведения 6 способами ($1 \cdot 90$, $2 \cdot 45$, $3 \cdot 30$, $5 \cdot 18$, $6 \cdot 15$, $9 \cdot 10$), следует, что в кружке может быть 92, 48, 34, 24, 22 или 20 ребят. Получаем, что оба условия могут быть выполнены только при количестве детей в секции, равном 22.

Критерии оценки.

1) В ответе не учитывается Таня (т. е. ответ 21) — 6 баллов.
2) Неполный перебор вариантов — не более 3 баллов.

4. В треугольнике ABC проведены высота BK и медиана BM. Точки K и M не совпадают и лежат между вершинами A и C. Известно, что углы ABK и MBC равны. Чему равен угол B?

Ответ: 90°.

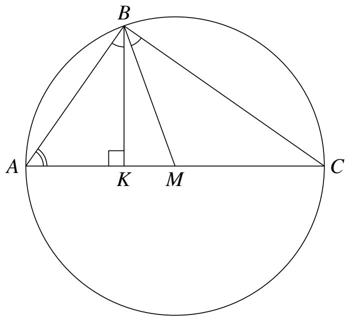


Рис. 1

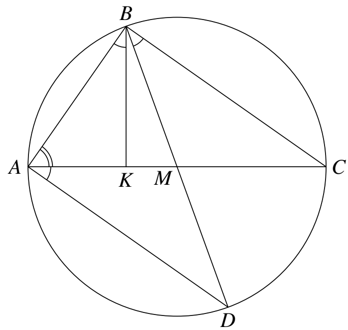


Рис. 2

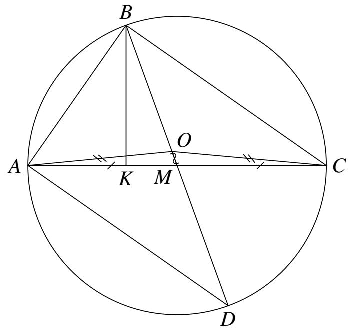


Рис. 3

Решение. Рассмотрим $\triangle ABK$ (рис. 1). Пусть $\angle ABK = \alpha$, $\angle BAK = \beta$. Треугольник ABK прямоугольный, поэтому $\alpha + \beta = 90°$. Опишем около $\triangle ABC$ окружность и продолжим медиану BM до пересечения с ней. Точку пересечения обозначим через D (рис. 2). Вписанные углы DAC и DBC равны. Из условия задачи следует, что $\angle DAC = \alpha$. Тогда $\angle BAD = \angle BAK + \angle KAD = \beta + \alpha = 90°$. Следовательно, BD — диаметр окружности. Диаметр BD пересекает хорду AC в точке M (середина AC). Но тогда AC — тоже диаметр. Если это не так (рис. 3), то $\triangle AOM = \triangle COM$ (O — центр окружности, лежит на диаметре BD). Но тогда OM и AC взаимно перпендикулярны и точки M и K совпадают. А это противоречит условию задачи. Следовательно, угол B — прямой.

Критерии оценки.

Точки M и K могут быть расположены на отрезке AC в обратном порядке, тогда рассуждения проводятся аналогично. В работе достаточно рассмотреть только один вариант расположения точек.

1) Доказательство того, что BD — диаметр без дальнейшего продвижения в решении оценивается в 3 балла.

5. На доске написано 2021 различное число. Миша любит перемножать числа и решил подчеркнуть те, которые равны произведению остальных 2020 чисел. Какое количество чисел он мог подчеркнуть?

Ответ: 0, 1 или 2.

Решение.

Пример на 0 чисел: $1, 2, 3, \ldots, 2021.$

Пример на 1 число: $1, 2, 3, \ldots, 2020, 2020!.$

Пример на 2 числа: $2, -2, -1, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots, 1011, \frac{1}{1011}.$

Оценка. Докажем, что не могло быть подчёркнуто три и более чисел. Заметим, что среди чисел нет 0, иначе ни одно число не окажется подчёркнуто, так как из этого следует, что есть ещё один 0. Пусть Миша подчеркнул три или более чисел. Выберем среди подчёркнутых какие-нибудь три a, b и c. Произведение остальных 2018 чисел обозначим P. Тогда, $a = bcP$, $b = acP$, $c = abP$. Попарно перемножив, получаем, что $c^2P^2 = b^2P^2 = a^2P^2 = 1$. Откуда $|a| = |b| = |c|$, но это противоречит тому, что все числа различные.

Критерии оценки.

1) Пользовались для доказательства, что все числа целые — 0 баллов.

2) Если пример не требует проверки, то за отсутствие объяснения баллы не снимаются.

3) Примеры на 0 и 1 число — 1 балл (оба примера).

4) Примеры на 0, 1, 2 числа — 3 балла.

5) Доказано, что подчёркнутых чисел не больше двух, но примеры на 0, 1 и 2 числа не приведены — 3 балла.

6. На окружности отметили n точек и раскрасили их в два цвета. Затем все точки попарно соединили отрезками, посчитали количество отрезков, соединяющих точки разных цветов, и количество отрезков, соединяющих точки одного цвета. Оказалось, что их поровну. При каких n это возможно?

Ответ: $n = k^2$, где k — целое.

Решение. Пусть количество точек первого цвета равно p, количество точек второго цвета равно q. Тогда число отрезков, соединяющих точки разных цветов равно pq, количество отрезков, соединяющих точки первого цвета равно $\frac{p(p-1)}{2}$, а количество отрезков, соединяющих точки второго цвета равно $\frac{q(q-1)}{2}$. По условию задачи

$$pq = \frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} \Leftrightarrow p + q = (p-q)^2. \qquad (*)$$

Таким образом, если условие задачи выполняется, то общее число точек $n = p + q = k^2$, где $k = p - q$.

Обратно, пусть общее количество точек $n = k^2$, где k — целое неотрицательное число. Покажем, что точки можно покрасить в два цвета так, чтобы количество отрезков, соединяющих точки одного цвета равнялось количеству отрезков, соединяющих точки разных цветов. Из равенства $(*)$ получаем систему равенств $p - q = k$, $p + q = k^2$, из которой находим:

$$p = \frac{k(k+1)}{2} \text{ — целое число,} \quad q = \frac{k(k-1)}{2} \text{ — тоже целое.}$$

Это и есть требуемые количества точек первого и второго цвета, удовлетворяющие условию задачи.

Критерии оценки.

1) Рассмотрены только один или несколько частных случаев — 0 баллов.
2) Если доказано, что из условий задачи следует равенство $n = k^2$ для некоторого k, но не доказано, что это равенство также является достаточным, решение оценивается не более, чем в 3 балла.

10 класс

1. Докажите, что любая возрастающая арифметическая прогрессия, которая содержит числа 189, 221, 245, содержит также число 2021.

   Решение. Не ограничивая общности можно считать, что $a_1 = 189$ и $a_m = 221$, $a_n = 245$ для некоторых натуральных m и n. Тогда $a_m - a_1 = (m-1)d = 32$, где d — разность прогрессии и $a_n - a_m = (n-m)d = 24$. Вычитая эти равенства получаем, что $(2m-n-1)d = 8$, то есть $d = \frac{8}{p}$, где $p = 2m - n - 1$. Заметим, что так как прогрессия возрастающая, то $d > 0$ и значит $p > 0$. Убедимся, что для любого натурального p можно подобрать такое k, чтобы $a_k = 2021$:

$$2021 = a_1 + (k-1)d = 189 + \frac{8(k-1)}{p} \Leftrightarrow 1832p = 8(k-1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 229p = k - 1 \Leftrightarrow k = 229p + 1.$$

Критерии оценки.

1) Рассмотрен только частный случай прогрессии — 0 баллов.
2) Приведено правильное решение, в котором предполагается, что разность прогрессии обязательно целая — 0 баллов.

2. На сколько областей делят координатную плоскость три линии: ось Ox и две параболы $y = x^2 - 1$, $x = y^2 - 1$?

   Ответ: 10.

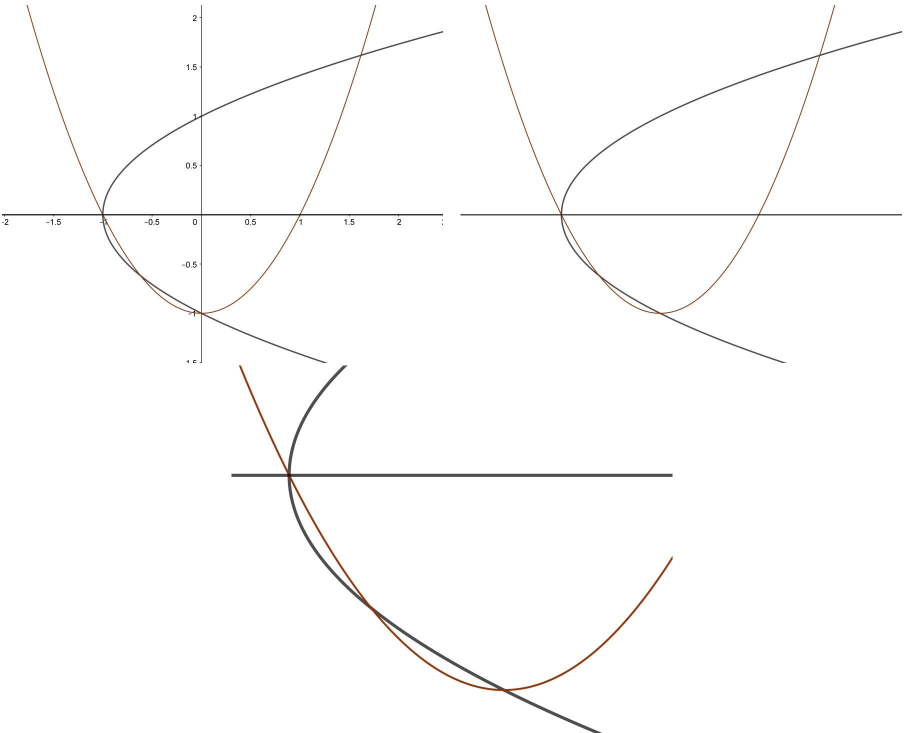
   Решение. Количество областей определяется количеством точек пересечения заданных парабол между собой и осью Ox. Решим систему $y = x^2 - 1$, $x = y^2 - 1$:

$$x = (x^2-1)^2 - 1 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(x+1)(x^2 - x - 1) = 0.$$

   У системы ровно 4 решения:

$$(0, -1), \quad (-1, 0), \quad \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \quad \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Получаем, что параболы делят плоскость на 7 частей. Первая парабола делит плоскость на две области, вторая высекает по одной новой области между каждыми двумя точками пересечения, всего три части, и добавляет две новые внешние области. Ось Ox пересекает две параболы в двух точках, то есть добавляет 3 новые области. Всего получаем 10 областей.



Критерии оценки.

1) Только ответ — 1 балл.
2) Не найдено число точек пересечения парабол — не более 3 баллов.

3. Решите уравнение $f(g(x)) = g(f(x))$, где $f(x) = |g(x)|$ и $g(x) = 1 - 2|x|$.

Ответ: $\left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$.

Решение. Уравнение имеет вид $\Big|1 - 2\big|1 - 2|x|\big|\Big| = 1 - 2\big|1 - 2|x|\big|$, то есть $|a| = a$. Равенство $|a| = a$ верно лишь при каждом $a \geqslant 0$, следовательно

$$1 - 2\big|1 - 2|x|\big| \geqslant 0 \Leftrightarrow 2\big|1 - 2|x|\big| \leqslant 1 \Leftrightarrow \big|1 - 2|x|\big| \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

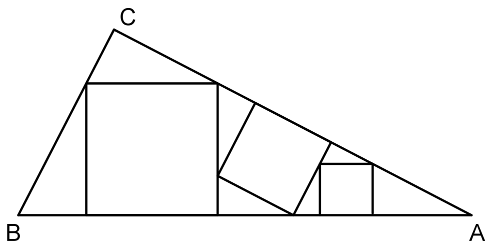
$$-\frac{1}{2} \leqslant 1 - 2|x| \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leqslant -2|x| \leqslant -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{2} \leqslant 2|x| \leqslant \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leqslant |x| \leqslant \frac{3}{4}.$$

Решением уравнения будет множество $\left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$.

Критерии оценки.

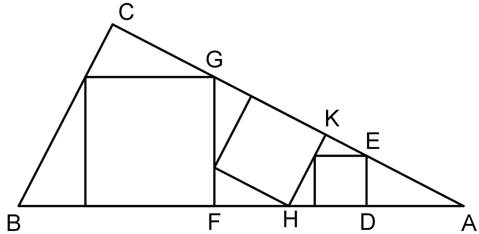
1) Если исходное уравнение записано в виде $\Big|1 - 2\big|1 - 2|x|\big|\Big| = 1 - 2\big|1 - 2|x|\big|$ — 1 балл.

4. В прямоугольный треугольник ABC поместили квадрат так, что одна его сторона лежит на гипотенузе, а другие две вершины расположены на катетах треугольника. Подобное построение выполнили ещё два раза (см. рисунок):



Найдите сторону большого квадрата, если сторона самого маленького квадрата равна $\frac{1}{2}$, а катет BC равен 4.

Ответ: 2.



Решение. Обозначим отрезки ED, HK, FG, как обозначено на рисунке. Треугольник ADE подобен треугольнику AKH по двум углам. Треугольник AKH подобен треугольнику AFG по двум углам. Треугольник AFG подобен треугольнику ACB по двум углам. При этом коэффициенты подобия во всех трёх случаях одинаковы. В подобных треугольниках пропорциональны соответственные элементы:

$$\frac{HK}{ED} = \frac{FG}{HK} = \frac{BC}{FG} = a.$$

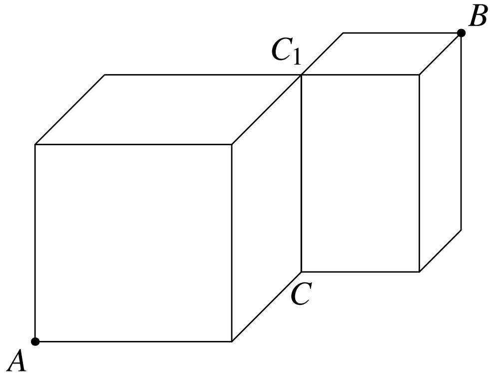
(Отношение катета, лежащего напротив угла A, и стороны вписанного квадрата). Перемножим эти равенства, получим, что $a^3 = \frac{BC}{FG} \cdot \frac{FG}{HK} \cdot \frac{HK}{ED} = \frac{BC}{ED} = 8$, $a = 2$. Значит, $HK = 2ED = 1$, $FG = 2HK = 2$.

Критерии оценки.

Решение задачи неявно использует тот факт, что квадрат вписывается в прямоугольный треугольник указанным образом единственным способом. Доказательство этого факта *не требуется*.

1) Только ответ — 0 баллов.
2) Неверно написано подобие (не соответствуют углы) — минус 2 балла.

5. Найдите длину кратчайшего пути из точки A в точку B по поверхности, образованной кубом и правильной четырёхугольной призмой с общим ребром CC_1 (см. рисунок). Ребро куба и высота призмы равны 5, сторона основания призмы равна 3. Грани куба и призмы, смежные ребру CC_1 лежат в двух перпендикулярных плоскостях.



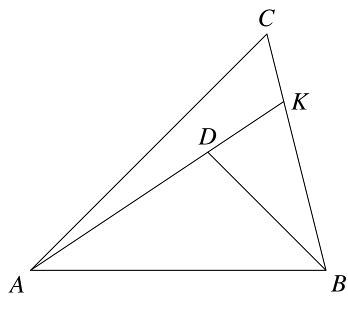
Ответ: $5\sqrt{2}+\sqrt{61}$.

Решение. Докажем сначала вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть точка D лежит внутри треугольника ABC. Тогда

$$AD + BD < AC + BC.$$

Доказательство леммы. Пусть K — точка пересечения прямой AD с прямой BC. Из неравенства треугольника следуют неравенства $BD < BK + KD$ и $AK < AC + CK$. Отсюда $AD + BD < AD + BK + KD = AK + BK < AC + CK + BK = AC + BC$, что и требовалось доказать.



Перейдём к решению задачи. Назовём *маршрутом* любой путь по поверхности из точки A в точку B. Заметим, что любой маршрут обязательно проходит через ребро CC_1, так как это ребро служит общей границей куба и призмы. Заметим также, что заданная комбинация куба и призмы симметрична относительно плоскости AA_1B (см. рис. 1). Поэтому не ограничивая общности можно считать, что кратчайший маршрут проходит по видимым на рисунке граням куба и призмы или, возможно, по их нижним основаниям.

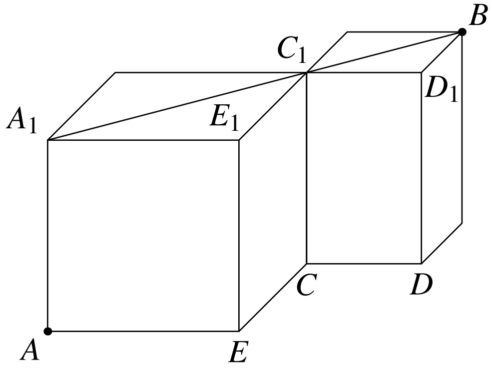


Рис. 1

1) Рассмотрим какой-либо маршрут, проходящий через ребро A_1E_1. Изобразим грани AEE_1A_1, $A_1E_1C_1$, а также грань C_1D_1B лежащими в одной плоскости (рис. 2).

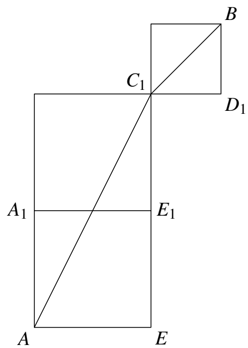


Рис. 2

Кратчайшим среди данных маршрутов будет ломаная AC_1B. Её длина равна

$$L_1 = AC_1 + C_1B = \sqrt{AE^2 + EC_1^2} + C_1D_1\sqrt{2} = 5\sqrt{5} + 3\sqrt{2}.$$

2) Рассмотрим маршруты, проходящие через ребро EE_1. Изобразим в одной плоскости грани AEE_1A_1, ECC_1E_1, CDD_1C_1, DB_1BD_1 и C_1D_1B (см. рис. 3). Здесь точка B должна быть изображена дважды как вершина соответствующих граней призмы, на рисунке это точки B' и B''.

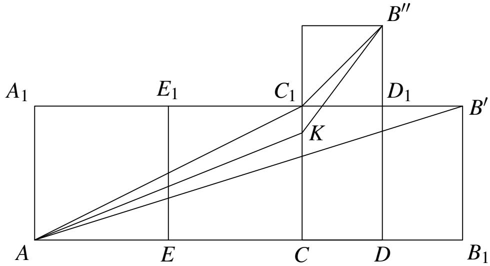


Рис. 3

Чтобы достичь точки B маршрут может пересечь либо ребро DD_1, либо ребро C_1D_1. В первом случае кратчайшим будет маршрут AB' с длиной

$$L_2 = AB' = \sqrt{AB_1^2 + (B_1B')^2} = \sqrt{16^2 + 5^2} = \sqrt{281}.$$

Покажем, что во втором случае кратчайший маршрут проходит через точку C_1. Предположим, что маршрут проходит через точку $K \in CC_1$. Тогда точка C_1 лежит внутри треугольника $AB''K$. По доказанной ранее лемме сумма расстояний от точки K до точек A и B'' будет больше, чем сумма расстояний от точки C_1 до этих же точек. Это и означает, что маршрут AKB'' длиннее маршрута AC_1B''. Таким образом, кратчайшим в этом случае будет маршрут AC_1B'', его длина

$$L_3 = AC_1 + C_1B'' = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} + C_1D_1\sqrt{2} =$$
$$= \sqrt{10^2 + 5^2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{5} + 3\sqrt{2}.$$

3) Рассмотрим маршруты, проходящие по нижнему основанию куба. Для этого изобразим в одной плоскости грани AEE_1A_1, AEC, CDD_1C_1, DD_1BB_1 и C_1D_1B (см. рис. 4). Как и в предыдущем случае здесь вершина B призмы изображена дважды в виде точек B' и B''.

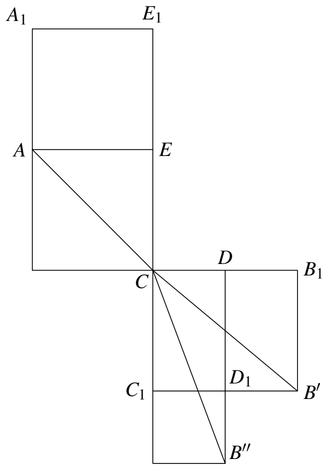


Рис. 4

Кратчайший из этих маршрутов должен пройти через точку C, а затем либо через ребро DD_1, либо через C_1D_1. В первом случае кратчайшим будет маршрут ACB', его длина

$$L_4 = AC + CB' = AE\sqrt{2} + \sqrt{CC_1^2 + CB_1^2} = \\ = 5\sqrt{2} + \sqrt{5^2 + 6^2} = 5\sqrt{2} + \sqrt{61}.$$

Во втором случае кратчайшим будет маршрут ACB'', его длина

$$L_5 = AC + CB'' = AE\sqrt{2} + \sqrt{CD^2 + (DB'')^2} = \\ = 5\sqrt{2} + \sqrt{3^2 + 8^2} = 5\sqrt{2} + \sqrt{73}.$$

Определим кратчайший среди всех найденных маршрутов. Очевидно, $L_1 = L_3$, $L_4 < L_5$. Сравним числа L_1 и L_2 с числом L_4:

$$5\sqrt{5} + 3\sqrt{2} > 5\sqrt{2} + \sqrt{61} \Leftrightarrow 5\sqrt{5} > 2\sqrt{2} + \sqrt{61} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 125 > 8 + 4\sqrt{122} + 61 \Leftrightarrow 56 > 4\sqrt{122} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 14 > \sqrt{122} \Leftrightarrow 196 > 122 \Rightarrow L_1 > L_4,$$
$$\sqrt{281} > 5\sqrt{2} + \sqrt{61} \Leftrightarrow 281 > 50 + 10\sqrt{122} + 61 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 170 > 10\sqrt{122} \Leftrightarrow 17 > \sqrt{122} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 289 > 122 \Rightarrow L_2 > L_4.$$

Таким образом, L_4 — длина кратчайшего маршрута.

Критерии оценки.

1) В решении верно указан кратчайший маршрут без проверки его минимальности — не более 3 баллов.
2) Рассмотрено несколько маршрутов, но кратчайший маршрут не найден — 0 баллов.
3) В решении использована доказанная выше лемма или аналогичное ей утверждение, при этом само утверждение в решении не доказано — не более 6 баллов.

6. Отличник Роман выписал на доске 2021 различное целое число. Таня возвела каждое число либо в квадрат, либо в куб и записала полученный 2021 результат в тетрадь. Какое наименьшее количество различных чисел могло оказаться в тетради?

Ответ: 674.

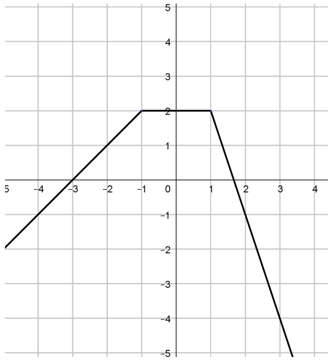
Решение. Рассмотрим множество всех чисел, записанных Таней в тетрадь. Докажем, что каждое число из этого множества может быть получено не более, чем из трёх чисел, записанных на доске. Действительно, если два куба равны, то равны и числа, значит число, записанное в тетрадь, могло быть получено возведением в куб только из одного числа, записанного на доске. Если два квадрата равны, то равны модули чисел, значит число, записанное в тетрадь, могло быть получено возведением в квадрат не более, чем из двух чисел, записанных на доске. Итак, каждому числу в тетради соответствует не более трёх чисел, записанных на доске. Значит, в тетради не менее $\frac{2021}{3}$, то есть, 674 чисел. Приведём пример на 674 числа. Возьмём 1 и 673 шестых степеней простых чисел $p_1^6, p_2^6, \ldots, p_{673}^6$. Это числа, записанные в тетради. Им соответствует 2021 число на доске: 1, -1 и 673 тройки: $-p_i^3$, p_i^3, p_i^2.

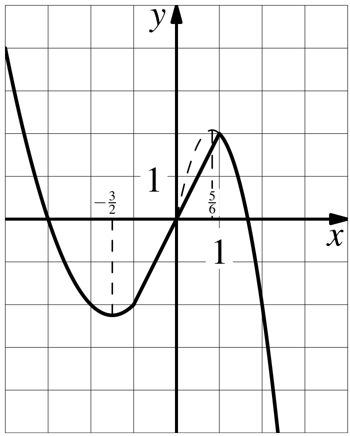
Критерии оценки.

1) Приведён пример на 674 числа, но не доказано, что это наименьшее количество чисел — 3 балла.
2) Доказано, что количество чисел в тетради не менее 674, но пример не приведён — 3 балла.

11 класс

1. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Постройте график функции $y = xf(x)$. Объясните построение.





Решение. Часть параболы $y = x(x+3)$ для $x < -1$. Отрезок прямой $y = 2x$ для x из отрезка $[-1, 1]$. Часть параболы $y = x(5-3x)$ для $x > 1$. У параболы $y = x(x+3)$ вершина параболы входит в график, т. к. $x_{в} = -\frac{3}{2} < -1$. У параболы $y = x(5-3x)$ вершина параболы не входит в график, т. к. $x_{в} = \frac{5}{6} < 1$.

Критерии оценки.

1) Верный рисунок без обоснования (не указано, что параболы, где вершины) — 1 балл.

2) Написано, какие параболы, без обоснования взаимного расположения вершин — 3 балла.

2. Существует ли такой многочлен с действительными коэффициента-

ми $f(x)$, для которого выполняется равенство $f(f(x)) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 2$ для всех действительных значений переменной x?

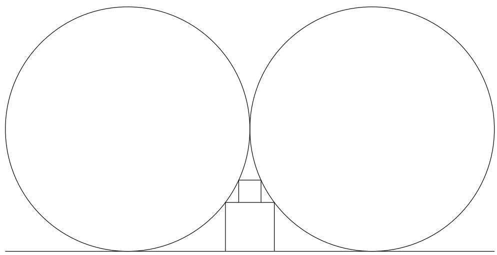
Ответ: Существует.

Решение. Многочлен $f(x) = x^2 + 2x - 1$ удовлетворяет условию задачи.

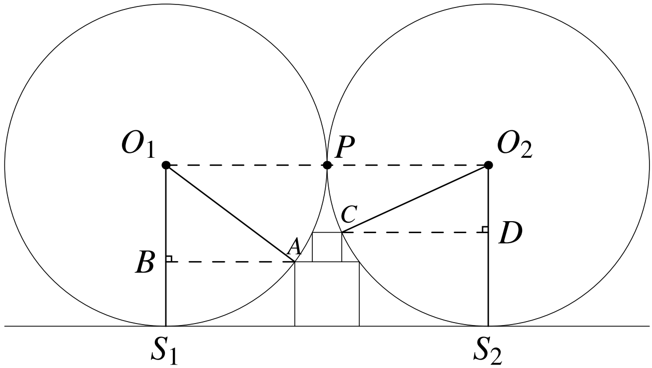
Критерии оценки.

1) Любые попытки доказать отсутствие многочлена, удовлетворяющего условию задачи, оцениваются в 0 баллов.
2) Многочлен приведён неправильно — 0 баллов.

3. Между двумя касающимися окружностями радиуса 1 и их общей внешней касательной вписаны два квадрата так, что сторона большего квадрата лежит на касательной, а сторона меньшего квадрата лежит на стороне большего. При этом на каждой из окружностей лежит по одной вершине каждого квадрата (см. рисунок). Найдите сторону меньшего квадрата.



Ответ: $\frac{2}{25}\left(11 - 2\sqrt{19}\right)$.



Решение. Обозначим за x сторону большего квадрата. Проведём радиус O_1A к точке касания большего квадрата с левой окружностью. Из точки A опустим перпендикуляр на O_1S_1. Рассмотрим прямоугольный $\triangle ABO_1$. У него сторона $O_1A = 1$, а также $BO_1 = O_1S_1 - x = 1 - x$. Касательная к обеим окружностям, проходящая через точку P касания окружностей является осью симметрии для рисунка, поэтому $BA = O_1P - \frac{x}{2} = 1 - \frac{x}{2}$. По теореме Пифагора для $\triangle ABO_1$ получаем

$$1^2 = (1-x)^2 + \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 \iff 5x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{5} \text{ или } x = 2.$$

Корень $x = 2$ посторонний, так как сторона квадрата должна быть меньше $S_1S_2 = 2$ и меньше расстояния от точки P до касательной S_1S_2 равного 1. Таким образом, сторона большего квадрата равна $\frac{2}{5}$. Аналогично рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle CO_2D$:

$$CO_2 = 1, \quad CD = 1 - \frac{y}{2}, \quad DO_2 = 1 - \frac{2}{5} - y,$$

где y — сторона малого квадрата. Применяя к этому треугольнику теорему Пифагора, получим

$$1^2 = \left(1 - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{5} - y\right)^2 \Longleftrightarrow$$

$$125y^2 - 220y + 36 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{25}\left(11 \pm 2\sqrt{19}\right).$$

Очевидно, сторона малого квадрата должна быть меньше стороны большего квадрата, поэтому корень

$$y = \frac{2}{25}\left(11 + 2\sqrt{19}\right) > \frac{2}{25}(11 + 2) = \frac{26}{25} > \frac{2}{5}$$

не подходит.

Критерии оценки.

1) Неверно составлено хотя бы одно уравнение — не более 1 балла.
2) Если в решении приведено несколько ответов, то есть посторонние решения не отброшены — 3 балла.

4. Секция лёгкой атлетики построилась в ряд на стадионе. Рядом с каждым спортсменом стоит корзина с мячами. Каждый, кто стоял перед Сашей бросил мяч каждому, кто стоял позади него. Саша подсчитал, что всего было сделано 80 бросков. Потом ребята перестроились и снова каждый спортсмен, стоявший в ряду перед Сашей бросил мяч каждому, кто стоял позади него. На этот раз оказалось выполнено 90 бросков. Сколько ребят ходят в секцию?

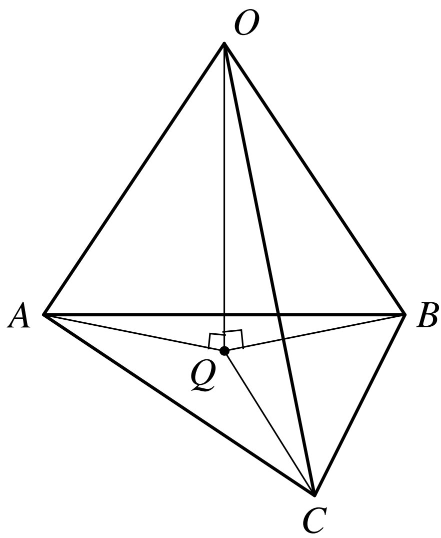
   Ответ: 22.

   Решение. Заметим, что 80 равно произведению количества ребят, стоявших перед Сашей и, стоявших после Саши в первом случае, а 90 — во втором. Число 80 можно представить в виде произведения двух целых чисел 5 способами: $1 \cdot 80$, $2 \cdot 40$, $4 \cdot 20$, $5 \cdot 16$, $8 \cdot 10$. Это означает, что в секции может быть 82, 43, 25, 22 или 19 ребят. Из второго условия, так как 90 можно представить в виде произведения 6 способами ($1 \cdot 90$, $2 \cdot 45$, $3 \cdot 30$, $5 \cdot 18$, $6 \cdot 15$, $9 \cdot 10$), следует, что в кружке может быть 92, 48, 34, 24, 22 или 20 ребят. Получаем, что оба условия могут быть выполнены только при количестве детей в секции, равном 22.

Критерии оценки.

1) В ответе не учитывается Саша (т. е. ответ 21) — 6 баллов.
2) Неполный перебор вариантов — не более 3 баллов.

5. Докажите, что для любых трёх отрезков одинаковой длины в пространстве можно подобрать плоскость таким образом, чтобы проекции отрезков на эту плоскость были равны.



Решение. Обозначим отрезки, расположенные в пространстве, через A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. По условию задачи отрезки имеют равную длину. Заметим, что любой параллельный перенос не изменяет длину проекции любого отрезка на любую плоскость. Поэтому вместо исходных отрезков можно рассматривать отрезки, полученные из них параллельным переносом в начало координат, то есть отрезки OA, OB, OC, которые параллельны отрезкам A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 соответственно.

Предположим сначала, что отрезки изначально были попарно параллельны. Тогда после параллельного переноса они будут совпадать и любая плоскость, проходящая через отрезки OA, OB, OC будет служить искомой плоскостью.

Если окажется, что среди исходных отрезков была только одна пара параллельных, например, $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, то отрезки OA и OB совпадут. Тогда все три отрезка OA, OB, OC окажутся лежащими в одной плоскости, которая будет искомой плоскостью.

Пусть теперь среди отрезков нет параллельных. Докажем, что плоскость, проходящая через точки A, B, C будет искомой плоскостью. Если точка O лежит в одной плоскости с точками A, B, C, то проекции отрезков на эту плоскость совпадут с самими отрезками, длины которых равны. В противном случае рассмотрим тетраэдр $OABC$. Опустим перпендикуляр на плоскость треугольника ABC и пусть Q — основание перпендикуляра. Тогда треугольники AQO, BQO, CQO равны по общему катету OQ и гипотенузам $AO = BO = CO$. Тогда равны катеты AQ, BQ, CQ, которые являются проекциями отрезков на плоскость треугольника ABC.

Критерии оценки.

1) Решение задачи в общем случае, когда отрезки после параллельного переноса не лежат в одной плоскости (следовательно, среди них нет параллельных) оценивается в 4 балла.
2) За каждый рассмотренный частный случай, когда
   - три отрезка попарно параллельны;
   - два отрезка из трёх параллельны;
   - среди отрезков нет параллельных, но они лежат в одной плоскости

   к решению добавляется 1 балл.

6. Отличник Роман выписал на доске 2021 различное целое число. Аня возвела каждое число либо в квадрат, либо в куб и записала полученный 2021 результат в тетрадь. Какое наименьшее количество различных чисел могло оказаться в тетради?

Ответ: 674.

Решение. Рассмотрим множество всех чисел, записанных Аней в тетрадь. Докажем, что каждое число из этого множества может быть получено не более, чем из трёх чисел, записанных на доске. Действительно, если два куба равны, то равны и числа, значит число, записанное в тетрадь, могло быть получено возведением в куб только из одного числа, записанного на доске. Если два квадрата равны, то равны модули чисел, значит число, записанное в тетрадь, могло быть получено возведением в квадрат не более, чем из двух чисел, записанных на доске. Итак, каждому числу в тетради соответствует не более трёх чисел, записанных на доске. Значит, в тетради не менее $\frac{2021}{3}$, то есть, 674 чисел. Приведём пример на 674 числа. Возьмём 1 и 673 шестых степеней простых чисел $p_1^6, p_2^6, \ldots, p_{673}^6$. Это числа, записанные в тетради. Им соответствует 2021 число на доске: 1, -1 и 673 тройки: $-p_i^3$, p_i^3, p_i^2.

Критерии оценки.

1) Приведён пример на 674 числа, но не доказано, что это наименьшее количество чисел — 3 балла.

2) Доказано, что количество чисел в тетради не менее 674, но пример не приведён — 3 балла.